Auxiliar 15: Teoría de la Medida

Profesor: Jaime San Martín
Auxiliares: Mauro Escobar - Felipe Subiabre
10 de diciembre de 2010

P1. Considere una variable aleatoria T a valores en $\mathbb{N}$, de ley geométrica

$$\mathbb{P}\{T = n\} = a(1+a)^{-n-1}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

donde $a > 0$ está fijo. Sea $\mathcal{F}_n$ la tribu más pequeña que hace medible a $T \wedge n$, $n \in \mathbb{N}$.

(i) Verifique que la familia de tribus $(\mathcal{F}_n)_n$ es una filtración, es decir, $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1}$ para $n \geq 0$. Muestre que $\mathcal{F}_n$ está engendrada por una partición de $n+1$ átomos.

(ii) Demuestre que, para todo n,

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{T \geq n+1\}} | \mathcal{F}_n) = (1+a)^{-1} \mathbf{1}_{\{T \geq n\}}.$$

(iii) Deduzca que

$$\mathbb{E}(T \wedge (n+1) | \mathcal{F}_n) = T \wedge n + (1+a)^{-1} \mathbf{1}_{T \geq n}.$$

(iv) ¿Para qué valores de λ el proceso

$$X_n = \lambda(T \wedge n) + \mathbf{1}_{\{T \geq n\}}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

es una martingala con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_n)_n$?

(v) Considerando los valores de λ anteriores, calcule la esperanza condicional $\mathbb{E}((X_{n+1} - X_n)^2 | \mathcal{F}_n)$. Deduzca que el proceso

$$X_n^2 - a(T \wedge (n-1)), \qquad n \geq 1,$$

es una martingala con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_n)_n$.

P2. Sean $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad, $(M_n)_{1 \leq n \leq k}$ martingala con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_n)_{1 \leq n \leq k}$ y $(H_n)_{1 \leq n \leq k}$ una familia de variables aleatorias sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tal que H_n sea $\mathcal{F}_{n-1}-$medible, para $n = 1, \ldots, k$ (con la convención $\mathcal{F}_0 = \{\phi, \Omega\}$).
Sea $a > 0$, definimos $T = \text{mín}\{1 \leq n \leq k-1 : |H_{n+1}| > a\}$ y $T = k$ si el conjunto donde se toma el mínimo es vacío. Demuestre que T es un tiempo de parada para la filtración $(\mathcal{F}_n)_{1 \leq n \leq k}$. Definimos, para $n = 1, \ldots, k$,

$$X_n = \sum_{1 \leq i \leq T \wedge n} H_i(M_i - M_{i-1}).$$

Demuestre que $(X_n)_{1 \leq n \leq k}$ es una martingala con respecto a $(\mathcal{F}_n)_{1 \leq n \leq k}$.