Clase Auxiliar N°3: Cálculo Estocástico

Profesor: Joaquín Fontbona
Auxiliares: Clara Fittipaldi - Gonzalo Mena

1 de septiembre de 2010

Introducción a las finanzas Un modelo básico de tiempo discreto para un mercado financiero se construye sobre un espacio de probabilidad finito $(\Omega, \mathbb{P}, \mathcal{F})$ dotado de una filtracion $(\mathcal{F}_n)_{i\in\{1\dots N\}}$ con $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_N = \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Suponemos además que $\forall \omega \in \Omega, \mathbb{P}(\omega) > 0$.
El mercado consiste en $d+1$ activos, cuyos precios (en el tiempo n) están dados por las variables aleatorias $S_n = (S_n^i)_{i=0\dots d}$, que son positivas y $\mathcal{F}_n$ medibles. El primer activo, sin riesgo, tiene un valor dado por $S_n^0 = (1+r)^n$, donde r es la tasa de descuento. De la misma forma podemos considerar el vector de precios descontado $\tilde{S}_n = \frac{S_n}{(1+r)^n}$.

Definición 1: Estrategia de comercio autofinanciante. Definimos una estrategia de comercio como $\phi = (\phi_n)_{n=0\dots N}$, con $\phi_n = (\phi_n^i)_{i=0\dots d}$. Requerimos que los procesos $(\phi_n^i)_{n=0\dots N}$ sean predecibles. Definimos el valor de la estrategia al tiempo n como el producto interno

$$V_n(\phi) = S_n \cdot \phi_n$$

Decimos que la estrategia es autofinanciate si

$$\phi_{n+1} \cdot S_n = \phi_n \cdot S_n$$

Definición 2: Estrategia de comercio admisible y de arbitraje, mercado viable. Una estrategia de comercio autofinanciante se dice admisible si $\forall n = 0 \dots N$ $V_n(\phi) \geq 0$. Decimos que la estrategia admisible es de arbitraje si $V_0(\phi) = 0, V(\phi) > 0, \quad \mathbb{P} - c.s.$ El mercado se dirá viable si no existen oportunidades de arbitraje

Defínción 3: Activo Contingente Obtenible, mercado completo. Un activo contingente de madurez N da un pago $h \geq 0$ que es $\mathcal{F}_N$ medible. Decimos que el activo así definido es obtenible si existe ϕ estrategia admisible tal que $V_N(\phi) = h$. El mercado se dirá completo si todo activo contingente es obtenible.

Definición 4: Call y Put Dos tipos especiales de opciones europeas (activo contingente) son la put y call, cuyos pagos están definidos por $P = (K - S_N^1)_+, C = (S_N^1 - K)_+$
Del cálculo estocástico son conocidos algunos teoremas que se aplican de manera especialmente útil en este contexto:

Proposición 1. Sea $(M_n)_{i=1\dots N}$ martingala y $(H_n)_{i=1\dots N}$ proceso predecible. Entonces el proceso X_n definido como

$$X_n = H_0 M_0 + \sum_{i=1}^{n} H_i \Delta M_i \qquad \Delta M_i = M_i - M_{i-1}$$

es una martingala

Teorema 1: Caracterización de estrategia autofinanciante. Son equivalentes

1. La estrategia ϕ es autofinanciante
2. Para todo $n \leq N$
$$V_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{i=0}^{N} \phi_i \cdot \Delta S_i \qquad \Delta S_i = S_i - S_{i-1}$$
3. Para todo $n \leq N$
$$\tilde{V}_n(\phi) = \tilde{V}_0(\phi) + \sum_{i=0}^{N} \phi_i \cdot \Delta \tilde{S}_i \qquad \Delta S_i = \tilde{S}_i - \tilde{S}_{i-1}$$

Teorema 2: Caracterización de mercado viable y completo. El mercado es viable sí y sólo sí para existe una medida de probabilidad $\mathbb{P}^*$, equivalente a $\mathbb{P}$ tal que los precios descontados $\tilde{S_n}$ son una $\mathbb{P}^*$ martingala.
Un mercado viable es completo sí y sólamente sí la medida anterior $\mathbb{P}^*$ es única.

Los conceptos anteriores serán aplicados a un modelo simple de un mercado financiero, propuesto por **Cox,Ross y Rubinstein**. En él se considera un activo sin riesgo, cuyo precio está dado por $S_n^0 = (1+r)^n$ y un activo riesgoso, cuyo precio varía de la siguiente manera

$$S_{n+1} = \begin{cases} S_n(1+a) \\ S_n(1+b) \end{cases}$$

con $-1 < a < b$ y el precio inicial S_0 es dado. Podemos considerar entonces $\Omega = \{(1+a), (1+b)\}^N$, es decir el conjunto de los posibles valores que pueden tomar los cuocientes $T_n = \frac{S_n}{S_{n-1}}$. Consideramos además $\mathcal{F}_n = \sigma(S_1, \dots S_n)$. De lo anterior, para $(x_1, \dots x_N)$ se tiene $\mathbb{P}(x_1, \dots x_N) = \mathbb{P}(T_1 = x_1, \dots T_N = x_N)$. Luego, la medida $\mathbb{P}$ está determinada por la ley conjunta de $(T_1, \dots T_N)$. Por otra parte, es claro que $\mathcal{F}_n = \sigma(T_1, \dots T_n)$

P1. Muestre que el precio descontado $(\tilde{S_n})_{i=0\dots N}$ es una $\mathbb{P}^*$-martingala sí y sólo si

$$\mathbb{E}^*(T_{n+1}|\mathcal{F}_n) = 1 + r \qquad \forall n = 0 \dots N-1$$

P2. Deduzca que si el mercado es viable entonces $r \in (a, b)$

P3. Exhiba estrategias de arbitrage para el caso $r \notin (a, b)$

P4. Asuma ahora que el mercado es viable. Defina $p = \frac{b-r}{b-a}$. Muestre que $(\tilde{S_n})_{i=0\dots N}$ es una $\mathbb{P}^*$- martingala si y sólamente si las variables T_i son I.I.D y tales que $\mathbb{P}^*(T_1 = 1+a) = p$ Concluya que en este caso el mercado es completo.

P5. Supongamos ahora que el mercado completo y consideramos $p, \mathbb{P}^*$ como en la parte anterior. Para una *put* P y *call* C consideramos sus valores condicionales. Estas cantidades se definen al notar que si ϕ es la estrategia que obtiene a una opción h entonces

$$V_n(\phi) = (1+r)^{-(N-n)}\mathbb{E}^*(h|\mathcal{F}_n)$$

Así,

$$P_n = (1+r)^{-(N-n)}\mathbb{E}^*(P|\mathcal{F}_n), C_n = (1+r)^{-(N-n)}\mathbb{E}^*(C|\mathcal{F}_n)$$

a) Derive la paridad *Put-Call*

$$C_n - P_n = S_n - K(1+r)^{-(N-n)}$$

b) Muestre que $C_n = c(n, S_n)$ donde c depende de K, a, b, r, p