Clase Auxiliar N°11: Cálculo Estocástico

Profesor: Joaquín Fontbona
Auxiliares: Clara Fittipaldi - Gonzalo Mena

21 de noviembre de 2010

P1. Algunas integrales

a) Demuestre que $\int_0^t B_s^3 dB_s = \frac{1}{4}B_t^4 - \frac{3}{2}\int_0^t B_s^2 ds$

b) Sea el proceso $X_t = X_0 e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)t+\sigma B_t}$ Demuestre que X_t satisface la ecuación diferencial estocástica (E.D.E)

$$dX_t = rX_t dt + \sigma X_t dB_t$$

P2. El Proceso de Ornstein-Uhlenbeck
Considere el proceso definido por $X_t = x_0 e^{-\theta t} + \mu(1 - e^{-\theta t}) + \int_0^t e^{\theta(s-t)}\sigma dB_s$.

a) Demuestre que X_t satisface la siguiente E.D.E.

$$dX_t = \theta(\mu - X_t)dt + \sigma dB_t \qquad X_0 = x_0$$

b) Calcule $E(X_t), Cov(X_t, X_s)$

c) Demuestre que si $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$ entonces $\int_0^t f(s)dB(s) \sim \mathcal{N}(0, \int_0^t f(s)^2 ds)$. Con esto, encuentre la distribución de X_t

P3. Caracterización de Levy del Movimiento Browniano Se demostrará el siguiente teorema. El Proceso estocásito X_t, con $X_0 = 0$ c.s. es un Movimiento Browniano si y solo si es una martingala local con $\langle X, X\rangle = t$. Para probar la parte no trivial se seguirán los siguientes pasos

a) Para el proceso X_t Defina $Z_t = e^{iuX_t+\frac{u^2}{2}t}$. Usando la fórmula de Ito muestre que

$$Z_t = 1 + iu\int_0^t Z_s dX_s$$

b) Pruebe que

$$\mathbb{E}(e^{iu(X_t-X_s)}|\mathcal{F}_s) = e^{\frac{-u^2}{2}(t-s)}$$

c) Concluya

P4. Consecuencias de Caracterización de Levy

a) Sean X_t, Y_t Movimientos Brownianos independientes. sea $\alpha \in [0, 1]$. Pruebe que $Z_t := \alpha X_t + \sqrt{1-\alpha}Y_t$ es también un movimiento Browniano. Calcule $\langle X_s, Z_s\rangle, \langle Y_s, Z_s\rangle$

b) Sea H_t Pogresivamente medible con $|H_t| = 1$. Pruebe que $Z_t = \int_0^t H_s dBs$ es un movimiento browniano

Nota En clases se probará la fórmula de Ito Multidimensional: Sean $(X_t^1, \ldots X_t^d)$ semimartingalas continuas, $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ de clase C^2. Entonces $f(X_t^d \ldots X_t^d)$ es una semimargingala y

$$f(X_t^1, \ldots X_t^d) = f(X_0^1, \ldots X_0^d) + \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s^1, \ldots X_s^d)dX_s^i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_s^1, \ldots X_s^d)d\langle X^i, X^j\rangle_s$$