Tarea 2 MA54G

03 Noviembre 2010

Prof.: Joaquín Fontbona
Aux.: Clara Fittipaldi, Gonzalo Mena.

Problema I

Sea $(B_t : t \geq 0)$ M.B. real standard. Se definen los tiempos aleatorios

$$d_1 := \inf\{s > 1 : B_s = 0\} \text{ y } g_1 := \sup\{s < 1 : B_s = 0\},$$

es decir, la primera vez que el M.B. toca 0 después del tiempo $t = 1$ y la última vez que la hace antes de $t = 1$, respectivamente.
Se calculará las leyes de d_1 y g_1

a) Muestre que $d_1 - 1 = \tilde{T}_{-B_1}$, donde para $a \in \mathbb{R}$, $\tilde{T}_a = \inf\{s > 0 : \tilde{B}_s = a\}$ con $\tilde{B}$ el proceso $\tilde{B}_t := B_{t+1} - B_1$.

b) Verifique que si X, Y, Z son tres v.a. definidas en el mismo espacio de probabilidad, con X independiente de (Y, Z) y tales que $Y =^{ley} Z$, entonces $(X, Y) =^{ley} (X, Z)$.

   Deduzca que
   $$d_1 - 1 =^{ley} \tilde{T}_{|B_1|}.$$

c) Usando el hecho que $\tilde{T}_a$ tiene densidad $\frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{a^2}{2t}\right) \mathbf{1}_{t>0}$ encuentre la densidad de $d_1 - 1$ y deduzca que
   $$\mathbb{P}(d_1 \in dt) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{t-1}t} \mathbf{1}_{t>1} dt$$

d) Defina $d_s = \inf\{r > s : B_r = 0\}$ y pruebe que $d_s =^{ley} s d_1$.

e) Pruebe que $g_1 =^{ley} \frac{1}{d_1}$ y deduzca que
   $$\mathbb{P}(g_1 \in dt) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{(1-t)t}} \mathbf{1}_{t \in (0,1)} dt.$$

Problema II

Construcción de Lévy del moviemento Browniano

Para cada $n \in \mathbb{N}$, $k = 0, 1, \ldots, 2^i - 1$, sea $f_{n,k}$ la función definida para $t \in [0,1]$ por

$$f_{n,k}(t) = \begin{cases} 2^{n/2}(t - k2^{-n}) & \text{si } t \in (k2^{-n}, (2k+1)2^{-(n+1)}), \\ 2^{-\frac{n+2}{2}} - 2^{n/2}(t - (2k+1)2^{-(n+1)}) & \text{si } t \in ((2k+1)2^{-(n+1)}, (k+1)2^{-n}) \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Sean $(N_{j,i}, i \in \mathbb{N}, j = 0, \ldots, 2^i - 1)$ v.a. i.i.d. $\mathcal{N}(0,1)$ y N otra v.a. de misma ley e independiente de las anteriores, todas definidas en un espacio de probabilidad dado, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Definimos para $n \geq 0$,

$$B_t^{(n)} := Nt + \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{2^n - 1} N_{j,i} f_{i,j}(t) \right) \quad \text{y } B_t^{(-1)} = Nt.$$

El objetivo de este problema es probar el siguiente resultado:

Teorema Con probabilidad 1, cuando $n \to \infty$ la sucesión de funciones aleatorias $B^{(n)}(\omega)$ converge uniformente en $[0,1]$ a una función continua, que denotamos

$$\begin{aligned} B(\omega) : [0,1] &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto B_t(\omega), \end{aligned}$$

y el proceso $(B_t, t \in [0,1])$ es un movimiento Browniano.

i) (1pt) Pruebe que para $n \geq 0$, $\mathbb{P}(\|B^{(n)} - B^{(n-1)}\|_u > \frac{1}{n^2}) \leq 2^n \mathbb{P}(N > \frac{1}{n^2} 2^{(n+2)/2)}) \leq 2^n \exp(-\frac{2^{n+2}}{2n^4})$, donde $\|\cdot\|_u$ denota la norma uniforme.

ii) (1pt) Deduzca que, para $\mathbb{P}-$casi todo $\omega \in \Omega$, $\exists n_0(\omega)$ t.q. $\forall n \geq n_0(\omega)$, $\|B^{(n)}(\omega) - B^{(n-1)}(\omega)\|_u < \frac{1}{n^2}$ y que, por lo tanto, casi seguramente, $(B^{(n)})$ es una sucesión de Cauchy en $C([0,1], \mathbb{R})$.

iii) (0.5pt) Se probará por inducción en $n \geq -1$ que las v.a.

$$B_{2^{-n-1}}^{(n)}, B_{2 \cdot 2^{-n-1}}^{(n)} - B_{2^{-n-1}}^{(n)}, \cdots, B_{k \cdot 2^{-n-1}}^{(n)} - B_{(k-1)2^{-n-1}}^{(n)}, \cdots, B_1^{(n)} - B_{(2^{n+1}-1)2^{-n-1}}^{(n)}$$

son independientes entre sí y de ley $\mathcal{N}(0, 2^{-n-1})$.

Note que el caso $n = -1$ es trivial, y que en el caso $n = 0$ lo que se quiere probar es que las v.a. $B_{\frac{1}{2}}^{(-1)} + N_{00}2^{-1} = \frac{1}{2}(N + N_{00})$ y $B_1^{(-1)} - (B_{\frac{1}{2}}^{(-1)} + N_{00}2^{-1}) = \frac{1}{2}(N - N_{00})$ son $\mathcal{N}(0, 2^{-1})$ independientes. Pruebe que ello es cierto.

iv) (1.5pt) Para el paso inductivo $n \to n+1$, explicite como se obtienen a partir de $B_{(k+1) \cdot 2^{-n-1}}^{(n)} - B_{k2^{-n-1}}^{(n)}$ los dos incrementos

$$B_{(2k+1) \cdot 2^{-n-2}}^{(n+1)} - B_{(2k)2^{-n-2}}^{(n+1)} \text{ y } B_{2(k+1) \cdot 2^{-n-2}}^{(n+1)} - B_{(2k+1)2^{-n-2}}^{(n+1)},$$

y deduzca que estos son independientes de ley $\mathcal{N}(0, 2^{-n-1})$, e independientes de los demás incrementos.

v) (2.0) Sea B el límite de la sucesión $B^{(n)}$. Porqué es un proceso y porqué es continuo? Pruebe que para todo $n \in \mathbb{N}$ los incrementos

$$B_{2^{-n-1}}, B_{2 \cdot 2^{-n-1}} - B_{2^{-n-1}}, \cdots, B_{k \cdot 2^{-n-1}} - B_{(k-1)2^{-n-1}}, \cdots, B_1 - B_{(2^{n+1}-1)2^{-n-1}}$$

son independientes entre sí y de ley $\mathcal{N}(0, 2^{-n-1})$. Deduzca que, con $\mathbb{D}$ denotando el conjunto de números diádicos, $(B_t, t \in [0,1] \cap \mathbb{D})$ es un proceso incrementos estacionarios independientes, con $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$ para todo $t, s \in [0,1] \cap \mathbb{D}$ con $s \leq t$. Concluya el resultado.

Problema III *Un problema simplificado de seguros*
Un contrato de una compañia de seguros responde con un monto preestablecido $m > 0$ a un evento que ocurrirá con probabilidad 1 en algún momento del período $[0, T]$.
Supondremos para simplificar que $T = 1$ y que el instante en que debe responder con el monto m está distribuido uniformemente en $[0, 1]$.
La companía tiene inversiones que le asegurarán un ingreso de ct en cada período $[0, t] \subseteq [0, 1]$, donde $c > 0$ está fijo.
El objetivo de este problema es determinar el valor mínimo de c de manera que la probabilidad de tener un capital negativo en algún momento del período $[0, 1]$ sea menor que $\alpha \in (0, 1)$ dado.

a) Sea $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_t, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad filtrado y $(M_t : t \geq 0)$ una martingala con trayectorias càdlàg. Suponga que $M_0 = a > 0$, que $M_t \geq 0$ para todo $t \geq 0$ c.s. y que existe $M_\infty := \lim_{t\to\infty} M_t = 0$ casi seguramente.

   Suponga además que M no da nunca saltos positivos (es decir c.s., para todo $t > 0$ se tiene $M_{t-} \geq M_t$).

   Sea $T_b = \inf\{t \geq 0 : M_t \geq b\}$. Muestre que $(M_{t\wedge T_b})_{t\geq 0}$ es una martingala acotada y deduzca que $\mathbb{P}(\sup_{t\geq 0} M_t > b) = \frac{a}{b}$

b) Sea ahora $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad cualquiera (completo) y $\tau : \Omega \to \mathbb{R}_+$ una v.a. cualquiera.

   Definimos $\mathcal{F}^0_t = \sigma\{\tau \wedge t\}$. Calcule $(\tau \wedge t)^{-1}(A)$ para $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Muestre que $\mathcal{F}^0_t = \{\tau^{-1}(A) : A \in \mathcal{B}([0, t]) \cup \{(t, \infty), \mathbb{R}\}\}$ y deduzca que $(\mathcal{F}^0_t)_{t\geq 0}$ es una filtración en $(\Omega, \mathcal{F}$.

   Definimos $(\mathcal{F}_t)$ como la filtración completa y continua a la derecha generada por $(\mathcal{F}^0_t)$.

   Pruebe que τ es un tiempo de parada c/r $(\mathcal{F}_t)$.

   (Nota: No es dificil probar que $(\mathcal{F}^0_t)$ es la filtración más pequenã que hace de τ un tiempo de parada (no se pide hacerlo).)

   Pruebe que para $Y \in L^1((\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ se tiene

$$\mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(Y|\tau)\mathbf{1}_{t\geq\tau} + \mathbf{1}_{\tau>t}\frac{\mathbb{E}(Y\mathbf{1}_{\tau>t})}{\mathbb{P}(\tau > t)}.$$

c) Sea ahora $\hat{\tau}$ v.a. definida en un espacio $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ representando el momento en el seguro es cobrado, y defina el proceso

$$D_t = m\mathbf{1}_{t>\hat{\tau}}, \quad t \in [0, 1].$$

   Pruebe que $M_t = \frac{D_{1-t}}{1-t}$ es una martingala cadlag con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_t)$ definida como en b) *en términos de la variable* $\tau := 1 - \hat{\tau}$. Indique sus valores iniciales y finales en $[0, 1]$.

d) Sea $S_t := ct - D_t, \quad t \in [0, 1]$. Usando todo lo anterior, pruebe que

$$\mathbb{P}(\exists t \in (0, 1) : S_t < 0) = \frac{m}{c}$$

   y concluya.

Nota: con las mismas técnicas se pueden estudiar situaciones más realistas en las que los momentos de cobros de seguro son aleatorios en $[0, \infty)$ (por ejemplo dados por un proceso de Poisson) y los montos comprometidos también (por ejemplo v.a. i.i.d).