



# *FENOMENOS DE TRANSPORTE EN METALURGIA*

*TRANSFERENCIA DE MOMENTUM*

*Clase 01/07*

*Prof. Dr. Leandro Voisin A.*



## Balance de momentum

- ✓ *El balance se aplica a un volumen de control de fluido con el objetivo de desarrollar u obtener una ecuación diferencial que represente y describa el comportamiento del mismo.*
- ✓ *Para la resolución de la ecuación diferencial será necesario imponer restricciones físicas del sistema (condiciones de borde) y de tiempo (condiciones iniciales).*
- ✓ *La resolución de la ecuación diferencial nos proporciona la distribución de velocidad en el sistema de donde se obtiene además el esfuerzo de corte en la interface fluido-sólida.*
- ✓ *El planteamiento del comportamiento de fluidos mediante balances de momentum es un tema básico e introductorio del transporte de momentum.*



## Balance de momentum

*Para flujo estacionario el balance de momentum queda definido por la ecuación general:*

$$\left( \begin{array}{c} \text{Flujo de momentum} \\ \text{entrante} \end{array} \right) - \left( \begin{array}{c} \text{Flujo de momentum} \\ \text{saliente} \end{array} \right) + \left( \sum \vec{F} \text{ del sistema} \right) = 0$$

## Generalidades

- ✓ *Los balances se aplican a una delgada “envoltura” de fluido.*
- ✓ *Se considera flujo rectilíneo en estado estacionario.*
- ✓ *Las fuerzas que nos interesan son las de presión actuando sobre las superficies y las de gravedad actuando sobre todo el volumen.*



## Generalidades

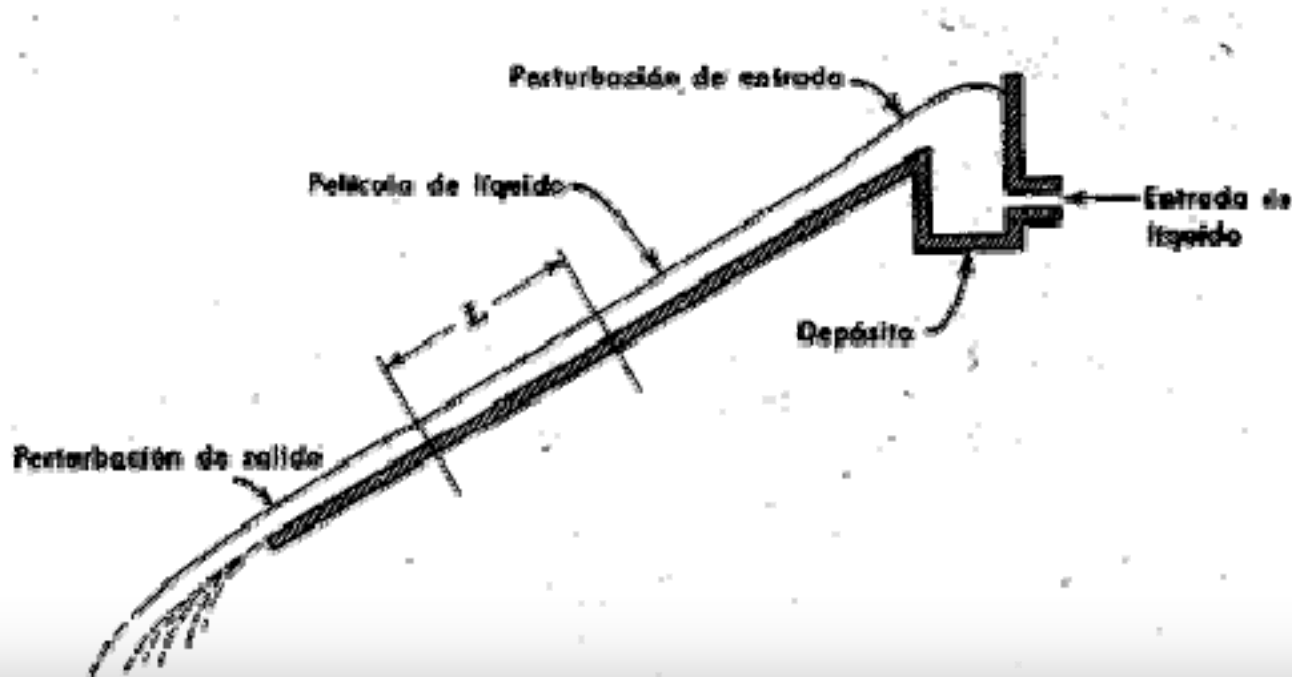
- ✓ *El momentum que entra o sale del sistema por transferencia de momentum lo hará ya sea por transporte molecular o por transporte convectivo.*
- ✓ *El balance de momentum, resulta en un balance de fuerzas porque tiene relación con los flujo de momentum que entran y salen del volumen de control.*
- ✓ *Si el flujo es Newtoniano, podremos relacionarlo con la ec. de viscosidad de Newton para determinar el perfil de distribución de velocidad del sistema.*
- ✓ *Si el flujo es no-Newtoniano la ec. de viscosidad de Newton no es valida y otros modelos empíricos deberán ser utilizados para determinar el perfil de distribución de velocidad del sistema.*



*Determinaciones de hecho físicos para valores concretos de la variable independiente utilizadas en la resolución de integración de problemas de fenómenos de transporte.*

- ✓ *Interfase fluido-sólido: velocidad del fluido = velocidad con que se mueve la superficie de contacto, principio de adherencia.*
- ✓ *Interfase fluido-gas: densidad de flujo de cantidad de movimiento o esfuerzo de corte, y por consiguiente el gradiente de velocidad en la fase líquida se supone igual a cero.*
- ✓ *Interfase fluido-fluido: la densidad de flujo de cantidad de movimiento como la velocidad son continuas a través de la interfase.*

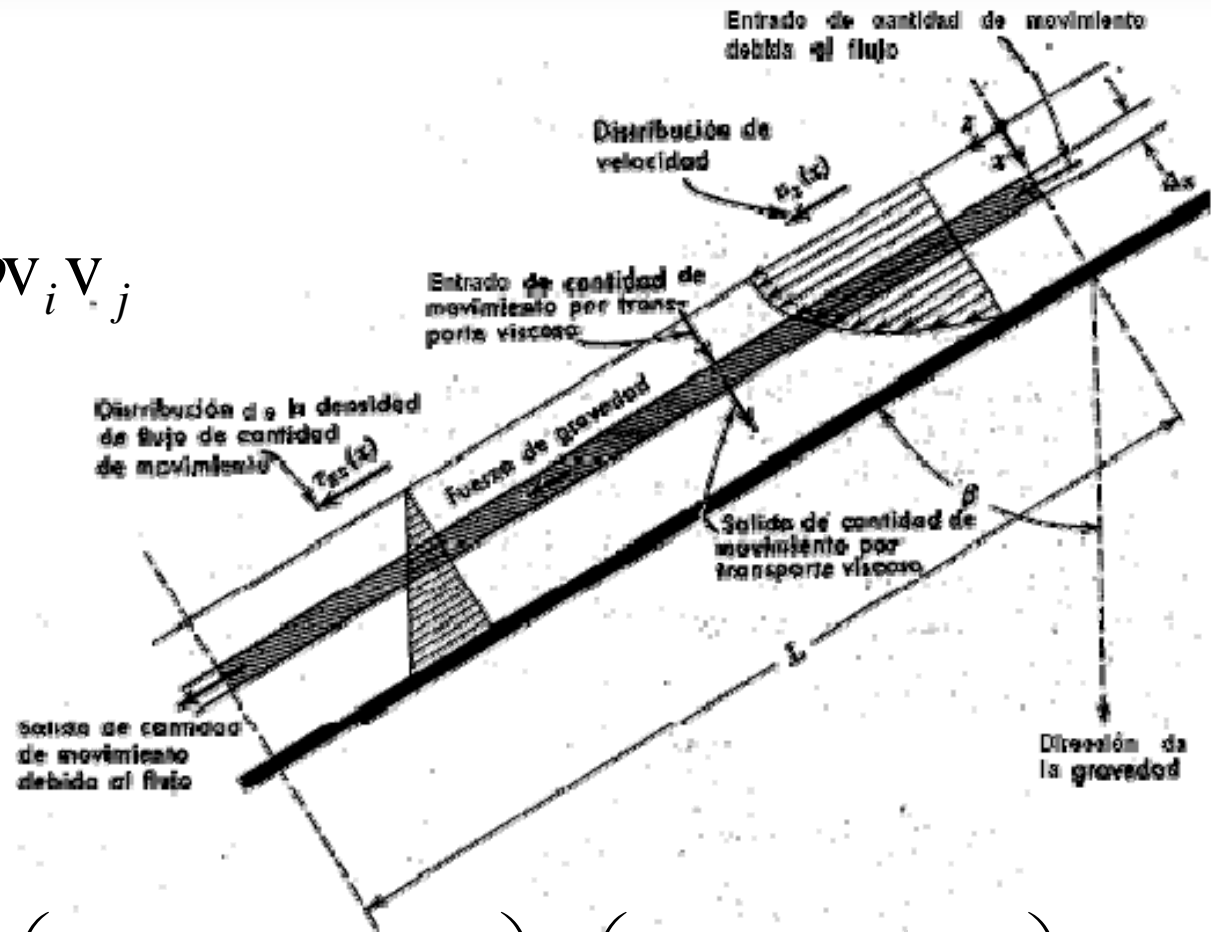
Considere el flujo de un líquido en estado estacionario descendiendo por un plano inclinado, el líquido presenta  $T^{\circ}$  cte. y por ende  $\rho$  y  $\mu$  permanecen ctes. Considere además un volumen de control de largo  $L$ , espesor variable  $\Delta_x$  y ancho perpendicular al plano de la imagen  $W$ , el cual se encuentra alejado de las entradas y salidas del sistema de forma tal que no existe influencia sobre  $v_z$ .



# Flujo laminar de un film en descenso

$$\phi_{ij} = \pi_{ij} + \rho V_i V_j$$

$$= p + \tau_{ij} + \rho V_i V_j$$



$$\left( \text{Flujo de momentum entrante} \right) - \left( \text{Flujo de momentum saliente} \right) + \left( \sum \vec{F} \text{ del sistema} \right) = 0$$

Flujo de momentum = FM

*FM entrante en la sección transv. a  $x$  (por viscosidad)*

$$(LW)(\tau_{xz})|_x$$

*FM saliente en la sección transv. a  $x+\Delta x$  (por viscosidad)*

$$(LW)(\tau_{xz})|_{x+\Delta x}$$

*FM entrante en la sección transv. a  $z = 0$  (mov. del fluido)*

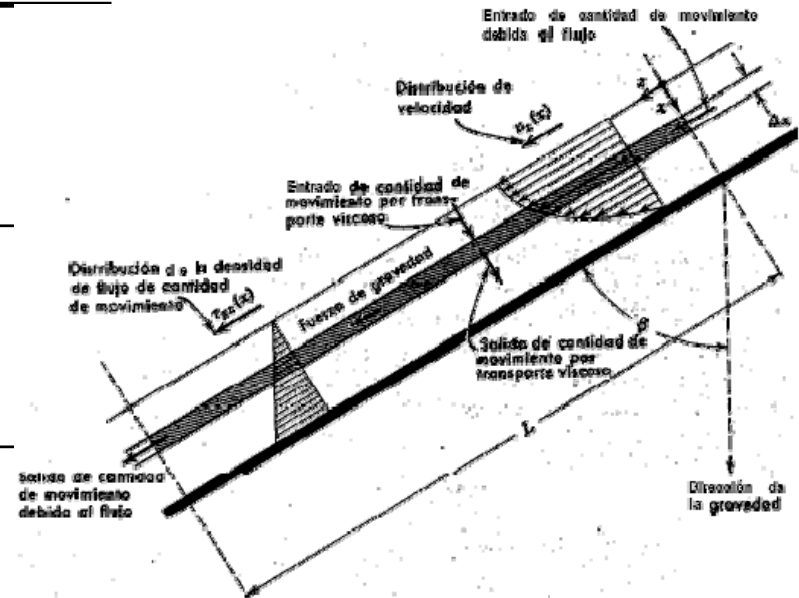
$$(W\Delta xv_z)(\rho v_z)|_{z=0}$$

*FM saliente en la sección transv. a  $z = L$  (mov. del fluido)*

$$(W\Delta xv_z)(\rho v_z)|_{z=L}$$

*F. de grav. actuando sobre el fluido*

$$(LW\Delta x)(\rho g \cos \beta)$$





$$\left( \begin{array}{c} \text{Flujo de momentum} \\ \text{entrante} \end{array} \right) - \left( \begin{array}{c} \text{Flujo de momentum} \\ \text{saliente} \end{array} \right) + \left( \sum \vec{F} \text{ del sistema} \right) = 0$$

$$LW \tau_{xz} \Big|_x - LW \tau_{xz} \Big|_{x+\Delta x} + W\Delta x \rho v_z^2 \Big|_{z=0} - W\Delta x \rho v_z^2 \Big|_{z=L} + \dots$$

$$\dots + LW\Delta x \rho g \cos \beta = 0$$

Los terminos tercero y cuarto se cancelan, y se divide por el volumen de control, permitiendonos hacer el  $\Delta x$  infinitamente pequeño, obteniendo por definición la primera derivada implícita de  $\tau_{xz}$  respecto a  $x$ :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\tau_{xz} \Big|_{x+\Delta x} - \tau_{xz} \Big|_x}{\Delta x} = \rho g \cos \beta$$

$$\frac{d\tau_{xz}}{dx} = \rho g \cos \beta$$

*Integrando implícitamente, se obtiene la ec. que describe el flujo de momentum (distribución del esfuerzo de corte):*

$$\tau_{xz} = \rho g x \cos \beta + C_1$$

*Aplicando la C.B.1, (interfase fluido-gas) en  $x = 0$ ,  $\tau_{xz} = 0$  tendremos que  $C_1 = 0$ :*

$$\tau_{xz} = \rho g x \cos \beta$$

*Como el fluido es Newtoniano aplicamos la ec. de viscosidad de Newton para obtener la distribución de velocidad:*

$$\tau_{xz} = -\mu \frac{dv_z}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{dv_z}{dx} = -\frac{\rho g \cos \beta}{\mu} x$$

*Integrando implícitamente:*

$$v_z = -\left(\frac{\rho g \cos \beta}{2\mu}\right)x^2 + C_2$$

*Aplicando la C.B.2, (interfase fluido-sólido) en  $x = \delta$ ,  $v_z = 0$  tendremos que  $C_2 = (\rho g \cos \beta / 2\mu) \delta^2$ :*

$$v_z = \frac{\rho g \delta^2 \cos \beta}{2\mu} \left[ 1 - \left(\frac{x}{\delta}\right)^2 \right]$$

*Resultando en una distribución de velocidad parabólica.*

Otras cantidades importantes pueden ser calculadas:

i) Velocidad máxima,  $V_z^{\max}$ , en  $x = 0$ : 
$$V_z^{\max} = \frac{\rho g \delta^2 \cos \beta}{2\mu}$$

ii) Velocidad promedio,  $\overline{V}_z$ : 
$$\overline{V}_z = \frac{\int_0^W \int_0^\delta v_z dx dy}{\int_0^W \int_0^\delta dx dy} = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta v_z dx$$

$$\overline{V}_z = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta v_z dx = \frac{\rho g \delta \cos \beta}{2\mu} \int_0^\delta \left[ 1 - \left( \frac{x}{\delta} \right)^2 \right] dx = \frac{\rho g \delta^2 \cos \beta}{3\mu}$$

iii) *Velocidad volumétrica o Caudal,  $Q$ :*

$$Q = \oint \overline{v_z} dS = \int_0^W \int_0^\delta \overline{v_z} dx dy = \overline{v_z} (W\delta) = \frac{\rho g W \delta^3 \cos \beta}{3\mu}$$

iv) *Espesor de la capa límite, ya sea como función de  $\overline{v_z}$ , de  $Q$  ó la velocidad de flujo de masa por unidad de anchura de pared ( $\Gamma = \rho \delta \overline{v_z}$ )*

$$\delta = \sqrt{\frac{3\mu \overline{v_z}}{\rho g \cos \beta}} = \sqrt[3]{\frac{3\mu Q}{\rho g W \cos \beta}} = \sqrt[3]{\frac{3\mu \Gamma}{\rho^2 g \cos \beta}}$$

v) *Componente-z de la fuerza  $F$  del fluido sobre la superficie, se obtiene integrando el esfuerzo de corte sobre la interfase fluido-sólido:*

$$\begin{aligned}
 F_s &= \int_0^L \int_0^W \tau_{xz} \Big|_{x=\delta} dy dz \\
 &= \int_0^L \int_0^W -\mu \frac{dv_z}{dx} \Big|_{x=\delta} dy dz \\
 &= (-LW\mu) \left( -\frac{\rho g \delta \cos \beta}{\mu} \right) \\
 &= LW\rho g \delta \cos \beta
 \end{aligned}$$



## Ejemplo 5:

Describir el comportamiento del flujo laminar de 2 fases inmiscibles fundidas de escoria y metal que descienden en estado estacionario por un plano inclinado. Las fases de escoria y metal presentan espesores  $\delta_s$  y  $\delta_m$  y viscosidades cinemáticas  $\nu_s$  y  $\nu_m$ , respectivamente.

## Ejemplo 5, Solución:

Para la escoria, se cumple la CB fluido-gas:

$$\tau_{xz} = \rho_s g x \cos \beta \quad \Rightarrow \quad \frac{dv_z}{dx} = -\frac{g \cos \beta}{\nu_s} x$$

Integrando:

$$v_z = -\left(\frac{g \cos \beta}{2\nu_s}\right)x^2 + C_1, \quad \delta_s \leq x \leq 0$$

De igual forma para el metal, tendremos:

$$\frac{d^2 v_z}{dx^2} = -\frac{g \cos \beta}{\nu_m} x$$

Integrando intrinsecamente 2 veces:

$$v_z = -\left(\frac{g \cos \beta}{2\nu_m}\right)x^2 + C_2 x + C_3, \quad \delta_s \leq x \leq (\delta_s + \delta_m)$$

Para determinar los valores de  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$ , imponemos las 3 CB:

C.B. 1:  $v_z = 0$  en  $x = (\delta_s + \delta_m)$

C.B. 2:  $v_z$  (metal) =  $v_z$  (escoria) en  $x = \delta_s$

C.B. 3:  $\tau_{xz}$  (metal) =  $\tau_{xz}$  (escoria) en  $x = \delta_s$



Resolviendo el sistema algebraico de 3 condiciones y 3 incognitas:

$$C_2 = \frac{(\rho_s + \rho_m) \delta_s \cos \beta}{\mu_m}$$

$$C_3 = \frac{(\delta_s + \delta_m)^2 g \cos \beta}{2\nu_m} + C_2(\delta_s + \delta_m)$$

$$C_1 = \frac{g \cos \beta}{2} \left[ \frac{\delta_m (2\delta_s + \delta_m)}{\nu_m} + \frac{\delta_s^2}{\nu_s} \right] + C_2 \delta_m$$



Considere el flujo laminar de un líquido en estado estacionario entre 2 placas paralelas, el líquido presenta  $T^o$  cte. y por ende  $\rho$  y  $\mu$  permanecen ctes. Considere además un volumen de control de largo  $L$ , espesor variable  $\Delta_y$  y ancho perpendicular al plano de la imagen  $W$ , el cual se encuentra alejado de las entradas y salidas del sistema de forma tal que no existe influencia sobre  $v_x$ .



$$\begin{aligned}\phi_{ij} &= \pi_{ij} + \rho v_i v_j \\ &= p + \tau_{ij} + \rho v_i v_j\end{aligned}$$

$$\left( \begin{array}{c} \text{Flujo de momentum} \\ \text{entrante} \end{array} \right) - \left( \begin{array}{c} \text{Flujo de momentum} \\ \text{saliente} \end{array} \right) + \left( \sum \vec{F} \text{ del sistema} \right) = 0$$

*Flujo de momentum = FM*



*FM entrante en la sección transv. a y  
(por viscosidad)*

$$(LW)(\tau_{yx}) \Big|_y$$

*FM saliente en la sección transv. a y+Δy  
(por viscosidad)*

$$(LW)(\tau_{yx}) \Big|_{y+\Delta y}$$

*FM entrante en la sección transv. a x = 0  
(mov. del fluido)*

$$(W\Delta y v_x)(\rho v_x) \Big|_{x=0}$$

*FM saliente en la sección transv. a x = L  
(mov. del fluido)*

$$(W\Delta y v_x)(\rho v_x) \Big|_{x=L}$$

*F. de presión actuando en la sección  
transv. a x = 0*

$$\Delta y W [P(x = 0)] = P_0 \Delta y W$$

*F. de presión actuando en la sección  
transv. a x = L*

$$- \Delta y W [P(x = L)] = -P_L \Delta y W$$



$$\left( \begin{array}{c} \text{Flujo de momentum} \\ \text{entrante} \end{array} \right) - \left( \begin{array}{c} \text{Flujo de momentum} \\ \text{saliente} \end{array} \right) + \left( \sum \vec{F} \text{ del sistema} \right) = 0$$

$$LW \tau_{yx} \Big|_y - LW \tau_{yx} \Big|_{y+\Delta y} + (P_O - P_L) \Delta y W = 0$$

Dividiendo por el volumen de control, permitiendonos hacer el  $\Delta y$  infinitamente pequeño, obtenemos por definición la primera derivada implícita de  $\tau_{yx}$  respecto a  $y$ :

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\tau_{yx} \Big|_{y+\Delta y} - \tau_{yx} \Big|_y}{\Delta y} = \frac{(P_O - P_L)}{L}$$

$$\frac{d\tau_{yx}}{dy} = \frac{(P_O - P_L)}{L}$$



*Imponiendo las condiciones de borde en la línea central ( $y = 0$ ) y en las paredes sólidas ( $y = \delta$ ):*

$$\text{C.B. 1: en } y = 0, \tau_{yx} = 0$$

$$\text{C.B. 2: en } y = \delta, v_x = 0$$

$$\tau_{yx} = \frac{(P_O - P_L)}{L} y$$

*Como el fluido es Newtoniano aplicamos la ec. de viscosidad de Newton para obtener la distribución de velocidad:*

$$v_x = \frac{1}{2\mu} (\delta^2 - y^2) \frac{(P_O - P_L)}{L}$$

*Resultando en una distribución de velocidad parabólica.*



Otras cantidades importantes pueden ser calculadas:

i) *Velocidad máxima, en  $y = 0$ :* 
$$v_x^{max} = \frac{1}{2\mu} \delta^2 \frac{(P_O - P_L)}{L}$$

ii) *Velocidad promedio:* 
$$\bar{v}_x = \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} v_x dy = \frac{\delta^2}{3\mu} \frac{(P_O - P_L)}{L}$$

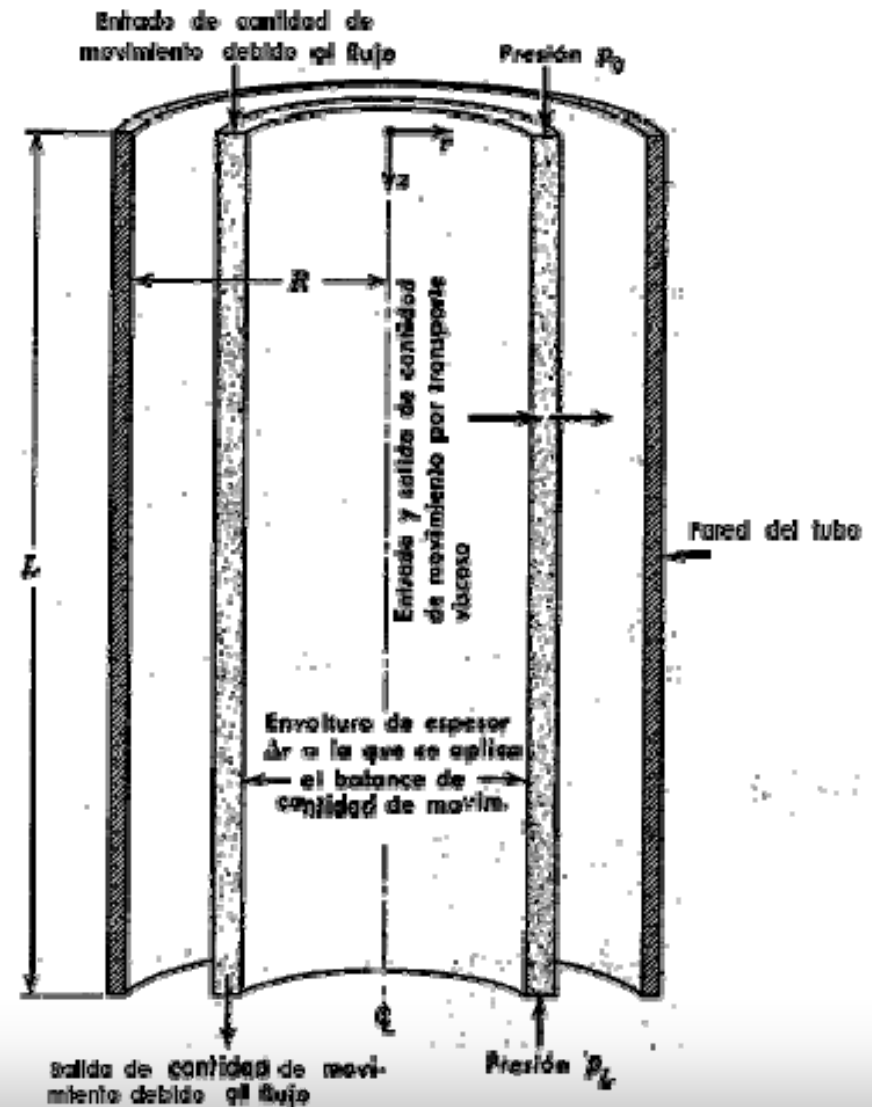
iii) *Velocidad volumétrica o Caudal:* 
$$Q = \frac{2}{3} \frac{W \delta^3}{\mu} \frac{(P_O - P_L)}{L}$$

# Flujo laminar estacionario a través de una cañería

*Considere el flujo de un líquido en estado estacionario a través de una cañería de largo  $L$  y radio  $R$ .*

*El líquido presenta  $T^0$  cte. y por ende  $\rho$  y  $\mu$  permanecen ctes.*

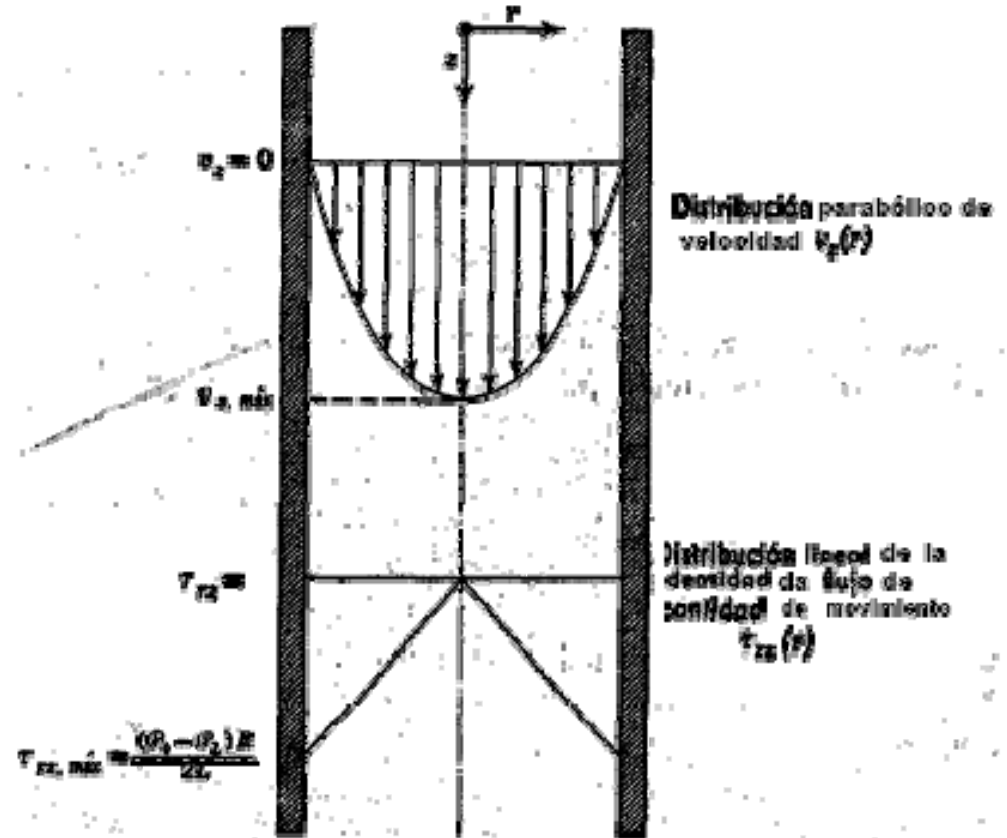
*Considere un volumen de control cilíndrico de largo  $L$  y espesor variable  $\Delta r$ , el cual se encuentra alejado de las entradas y salidas del sistema de forma tal que no existe influencia sobre  $v_z$ .*





# Flujo laminar estacionario a través de una cañería

$$\begin{aligned}
 \phi_{ij} &= \pi_{ij} + \rho v_i v_j \\
 &= p + \tau_{ij} + \rho v_i v_j
 \end{aligned}$$



$$\left( \text{Flujo de momentum entrante} \right) - \left( \text{Flujo de momentum saliente} \right) + \left( \sum \vec{F} \text{ del sistema} \right) = 0$$

Flujo de momentum = FM

## Flujo laminar estacionario a través de una cañería

---

*FM entrante en la sección transv. a r  
(por viscosidad)*

$$(2\pi r L \tau_{rz}) \Big|_r$$

*FM saliente en la sección transv. a  $r + \Delta r$   
(por viscosidad)*

$$(2\pi r L \tau_{rz}) \Big|_{r + \Delta r}$$

*F. de gravedad actuando sobre el  
volumen del cilindro*

$$(2\pi \Delta r L) \rho g$$

*F. de presión actuando en la sección  
transv. a  $z = 0$*

$$(2\pi \Delta r) P_o$$

*F. de presión actuando en la sección  
transv. a  $z = L$*

$$(2\pi \Delta r) P_L$$


---

*En este caso el factor de área ( $2\pi r L$ ) así como el esfuerzo de corte dependen de  $r$ .*

## Flujo laminar estacionario a través de una cañería

---

$$\left( \begin{array}{c} \text{Flujo de momentum} \\ \text{entrante} \end{array} \right) - \left( \begin{array}{c} \text{Flujo de momentum} \\ \text{saliente} \end{array} \right) + \left( \sum \vec{F} \text{ del sistema} \right) = 0$$

$$\begin{aligned} & (2\pi r L \tau_{rz}) \Big|_r - (2\pi r L \tau_{rz}) \Big|_{r+\Delta r} + \dots \\ & \dots + 2\pi r \Delta r L \rho g + 2\pi r \Delta r (P_O - P_L) = 0 \end{aligned}$$

*Es importante notar que todos los terminos contienen el factor  $r$ , por lo tanto, siendo que  $r$  es una variable no deberíamos utilizarlo como comun divisor. Luego dividiendo por  $2\pi L \Delta r$  y hacemos tender  $\Delta r$  a cero para obtenemos la primera derivada implicita de  $r\tau_{rz}$  respecto a  $r$ :*

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{r\tau_{rz} \Big|_{r+\Delta r} - r\tau_{rz} \Big|_r}{\Delta r} = \left[ \frac{P_O - P_L}{L} + \rho g \right] r$$

## Flujo laminar estacionario a través de una cañería

---

$$\frac{d}{dr}(r\tau_{rz}) = \left[ \frac{P_O - P_L}{L} + \rho g \right] r$$

*Integrando los campos, se obtiene la ec. que describe el flujo de momentum (distribución del esfuerzo de corte):*

$$\tau_{rz} = \left[ \frac{P_O - P_L}{L} + \rho g \right] \frac{r}{2} + \frac{C_1}{r}$$

*Aplicando la C.B.1, (simetría) en  $r = 0$ ,  $\tau_{rz} = 0$  tendremos que  $C_1 = 0$ :*

$$\tau_{rz} = \left[ \frac{P_O - P_L}{L} + \rho g \right] \frac{r}{2}$$

## *Flujo laminar estacionario a través de una cañería*

---

*Como el fluido es Newtoniano aplicamos la ec. de viscosidad de Newton para obtener la distribución de velocidad:*

$$\tau_{rz} = -\mu \frac{dv_z}{dr}$$

*Aplicando la C.B.2, (interfase fluido-sólido) en  $r = R$ ,  $v_z = 0$  tendremos que:*

$$v_z = \left[ \frac{P_o - P_L}{L} + \rho g \right] \left( \frac{R^2}{4\mu} \right) \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

*Resultando en una distribución de velocidad parabólica.*

## Flujo laminar estacionario a través de una cañería

*Otras cantidades importantes pueden ser calculadas:*

i) *Velocidad máxima, en  $r = 0$ :* 
$$v_z^{max} = \left[ \frac{P_o - P_L}{L} + \rho g \right] \frac{R^2}{4\mu}$$

ii) *Velocidad promedio:*

$$\bar{v}_z = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R v_z r dr d\theta = \left[ \frac{P_o - P_L}{L} + \rho g \right] \frac{R^2}{8\mu}$$

iii) *Velocidad volumétrica o Caudal:* 
$$Q = \left[ \frac{P_o - P_L}{L} + \rho g \right] \frac{\pi R^4}{8\mu}$$

*La ec. iii) es conocida en fluidodinámica como la ley Hagen-Poiseuille y es válida para largos iniciales de entrada a cañería de  $L_e = 0.035 DRe$  asegurando un flujo estacionario.*

# Flujo adyacente de dos fluidos inmiscibles

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{velocidad de entrada} \\ \text{de} \\ \text{cantidad de movimiento} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} \text{velocidad de salida} \\ \text{de} \\ \text{cantidad de movimiento} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \text{suma de las fuerzas} \\ \text{que} \\ \text{actúan sobre el sistema} \end{array} \right\} = 0$$

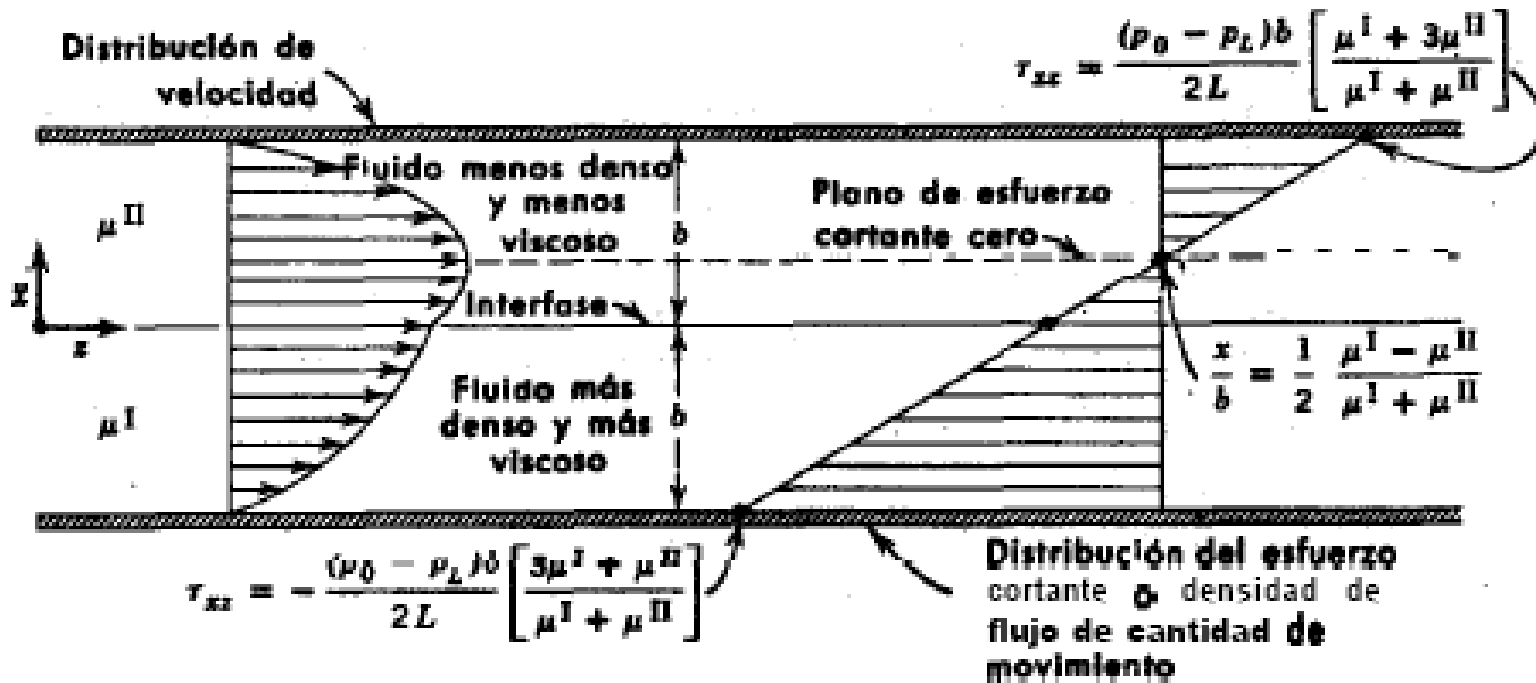


Fig. 2.5-1. Flujo de dos fluidos inmiscibles entre dos láminas planas paralelas debido a un gradiente de presión.

# Flujo adyacente de dos fluidos inmiscibles

$$\frac{d\tau_{xz}}{dx} = \frac{p_0 - p_L}{L} \quad (2.5-1)$$

Esta ecuación se obtiene tanto para la fase I como para la fase II. Integrando la Ec. 2.5-1 para las dos regiones, resulta

$$\tau_{xz}^I = \left( \frac{p_0 - p_L}{L} \right) x + C_1^I \quad (2.5-2)$$

$$\tau_{xz}^{II} = \left( \frac{p_0 - p_L}{L} \right) x + C_1^{II} \quad (2.5-3)$$

Se utiliza la **condición** límite de que el transporte de cantidad de movimiento es continuo a través de la interfase de los dos fluidos:

$$\text{C.L. 1 :} \quad \text{para } x = 0 \quad \tau_{xz}^I = \tau_{xz}^{II} \quad (2.5-4)$$

Lo que nos indica que  $C_1^I = C_1^{II}$ , y, por tanto, le llamaremos simplemente **constante** de integración  $C_1$ .

Si se substituye la ley de Newton de la viscosidad en las Ecs. 2.5-2 y 2.5-3, se llega a

$$-\mu^I \frac{dv_z^I}{dx} = \left( \frac{p_0 - p_L}{L} \right) x + C_1 \quad (2.5-5)$$

$$-\mu^{II} \frac{dv_z^{II}}{dx} = \left( \frac{p_0 - p_L}{L} \right) x + C_1 \quad (2.5-6)$$

La integración de estas ecuaciones da

$$v_z^I = -\frac{(p_0 - p_L)x^2}{2\mu^I L} - \frac{C_1}{\mu^I} x + C_2^I \quad (2.5-7)$$

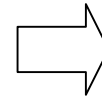
$$v_z^{II} = -\frac{(p_0 - p_L)x^2}{2\mu^{II} L} - \frac{C_1}{\mu^{II}} x + C_2^{II} \quad (2.5-8)$$



# Flujo adyacente de dos fluidos inmiscibles

Para determinar las tres constantes de **integración**, se utilizan estas tres límite adicionales

- C.L. 2 :                    para  $x = 0$ ,                     $v_x^I = v_x^{II}$
- C.L. 3 :                    para  $x = -b$ ,                     $v_x^I = 0$
- C.L. 4 :                    para  $x = +b$ ,                     $v_x^{II} = 0$



$$\begin{aligned}
 C_2^I &= C_2^{II} \\
 0 &= -\frac{(p_0 - p_L)b^2}{2\mu^I L} + \frac{C_1 b}{\mu^I} + C_2^I \\
 0 &= -\frac{(p_0 - p_L)b^2}{2\mu^{II} L} - \frac{C_1 b}{\mu^{II}} + C_2^{II}
 \end{aligned}$$

De estas ecuaciones se deduce que

$$C_1 = -\frac{(p_0 - p_L)b}{2L} \left( \frac{\mu^I - \mu^{II}}{\mu^I + \mu^{II}} \right) \quad (2.5-15)$$

$$C_2^I = +\frac{(p_0 - p_L)b^2}{2\mu^I L} \left( \frac{2\mu^I}{\mu^I + \mu^{II}} \right) = C_2^{II} \quad (2.5-16)$$

Por lo tanto, los perfiles de densidad de flujo de cantidad de movimiento y de velocidad son:

$$\tau_{xz} = \frac{(p_0 - p_L)b}{L} \left[ \left( \frac{x}{b} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\mu^I - \mu^{II}}{\mu^I + \mu^{II}} \right) \right] \quad (2.5-17)$$

$$v_x^I = \frac{(p_0 - p_L)b^2}{2\mu^I L} \left[ \left( \frac{2\mu^I}{\mu^I + \mu^{II}} \right) + \left( \frac{\mu^I - \mu^{II}}{\mu^I + \mu^{II}} \right) \left( \frac{x}{b} \right) - \left( \frac{x}{b} \right)^2 \right] \quad (2.5-18)$$

$$v_x^{II} = \frac{(p_0 - p_L)b^2}{2\mu^{II} L} \left[ \left( \frac{2\mu^{II}}{\mu^I + \mu^{II}} \right) + \left( \frac{\mu^I - \mu^{II}}{\mu^I + \mu^{II}} \right) \left( \frac{x}{b} \right) - \left( \frac{x}{b} \right)^2 \right] \quad (2.5-19)$$