Ingeniería de Minas
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

FENOMENOS DE TRANSPORTE EN METALURGIA

TRANSFERENCIA DE MOMENTUM

Clase 02/07

Prof. Dr. Leandro Voisin A.

Generalidades

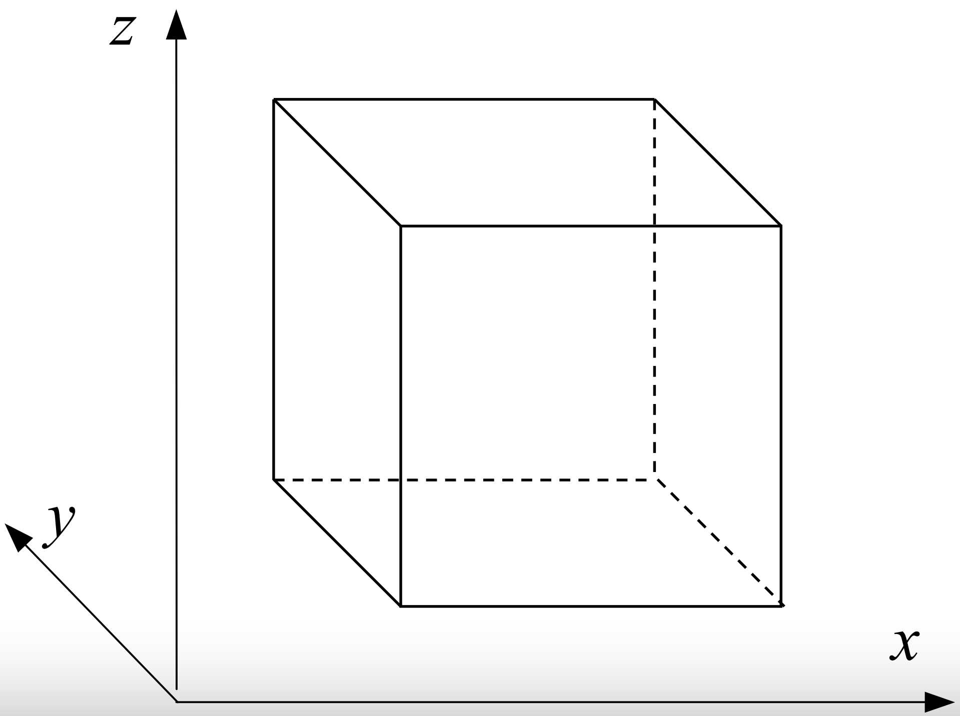
- ✓ *La ec. de Navier Stokes corresponde a la ecuación general de balance de flujo de momemtum y es valida para describir el comportamiento de todo tipo de flujo.*
- ✓ *Cuando se desea resolver problemas simples de flujos iso-termales en donde ρ y μ son constantes es preferible aplicar balances simples diferenciales de momemtum.*
- ✓ *La ec. de Navier Stokes es utilizada en conjunto con la ec. de continuidad para simplificar su desarrollo.*
- ✓ *Ambas ecuaciones pueden ser desarrolladas vectorial o tensorialmente dependiendo de las condiciones del problema a enfrentar.*

Generalidades

- ✓ *La utilización conjunta de estas ecuaciones, representan la solución matemática a problemas de flujo de fluidos, son ecuaciones complejas y no siempre entregan soluciones exactas.*
- ✓ *La ec. de continuidad se desarrolla a partir de la aplicación de la ley de conservación de masa a un elemento de volumen pequeño inmerso en un flujo.*
- ✓ *Ambas ecuaciones son validas para resolver problemas de flujo laminar y turbulento, sin embargo debido a su complejidad, se prefiere abordar estos últimos mediante modelos empíricos.*

Para desarrollar la ec. debemos aplicar la ley de conservación de masa a un elemento de volumen inmerso en un fluido en movimiento que presenta las componentes de velocidad, v_x, v_y *y* v_z .

$$\left(\text{Acumulación de flujo de masa}\right) = \left(\text{Flujo de masa entrante}\right) - \left(\text{Flujo de masa saliente}\right)$$



Ecuación de Continuidad

El flujo de volumen del fluido que entra a través de la sección transversal perpendicular a la dirección-x es el producto de la velocidad (componente-x) y el área de la sección transversal:

$$\Delta y \Delta z v_x \big|_x$$

El flujo másico del fluido que entra a través de la sección transversal-x perpendicular a la dirección-x es:

$$\Delta y \Delta z \left(\rho v_x \right) \big|_x$$

El flujo másico del fluido que sale a través de la sección transversal-x+Δx perpendicular a la dirección-x es:

$$\Delta y \Delta z \left(\rho v_x \right) \big|_{x+\Delta x}$$

Ecuación de Continuidad

Las expresiones de flujo másico que entran y salen a través de las otras secciones transversales perpendiculares a las direcciones-y, -z, son análogas.

La acumulación, es la velocidad del cambio de masa en el elemento de volumen de control:

$$\Delta x \Delta \mathrm{y} \Delta \mathrm{z} \frac{\partial \rho}{\partial \mathrm{t}}$$

$\therefore$ *El balance general de masa es:*

$$\Delta x \Delta \mathrm{y} \Delta \mathrm{z} \frac{\partial \rho}{\partial \mathrm{t}} = \Delta \mathrm{y} \Delta \mathrm{z}\left(\rho \mathrm{v}_x\big|_x - \rho \mathrm{v}_x\big|_{x+\Delta x}\right) + \ldots$$

$$\ldots + \Delta x \Delta z\left(\rho \mathrm{v}_y\big|_y - \rho \mathrm{v}_y\big|_{y+\Delta y}\right) + \Delta x \Delta y\left(\rho \mathrm{v}_z\big|_z - \rho \mathrm{v}_z\big|_{z+\Delta z}\right)$$

Dividiendo por el volumen de control ΔxΔyΔz y haciéndolo tender a 0, se obtiene la ec. de continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\left(\frac{\partial}{\partial x} \rho v_x + \frac{\partial}{\partial y} \rho v_y + \frac{\partial}{\partial z} \rho v_z \right)$$

Para fluidos de densidad ρ constante (mayoría de problemas de ingeniería), la ecuación de continuidad puede reducirse a la forma:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

En notación vectorial:

$$\nabla \cdot v = 0$$

Ecuación General de Momentum

Para todo tipo de flujos incluidos aquellos no estacionarios, el balance general de flujo de momentum queda definido por:

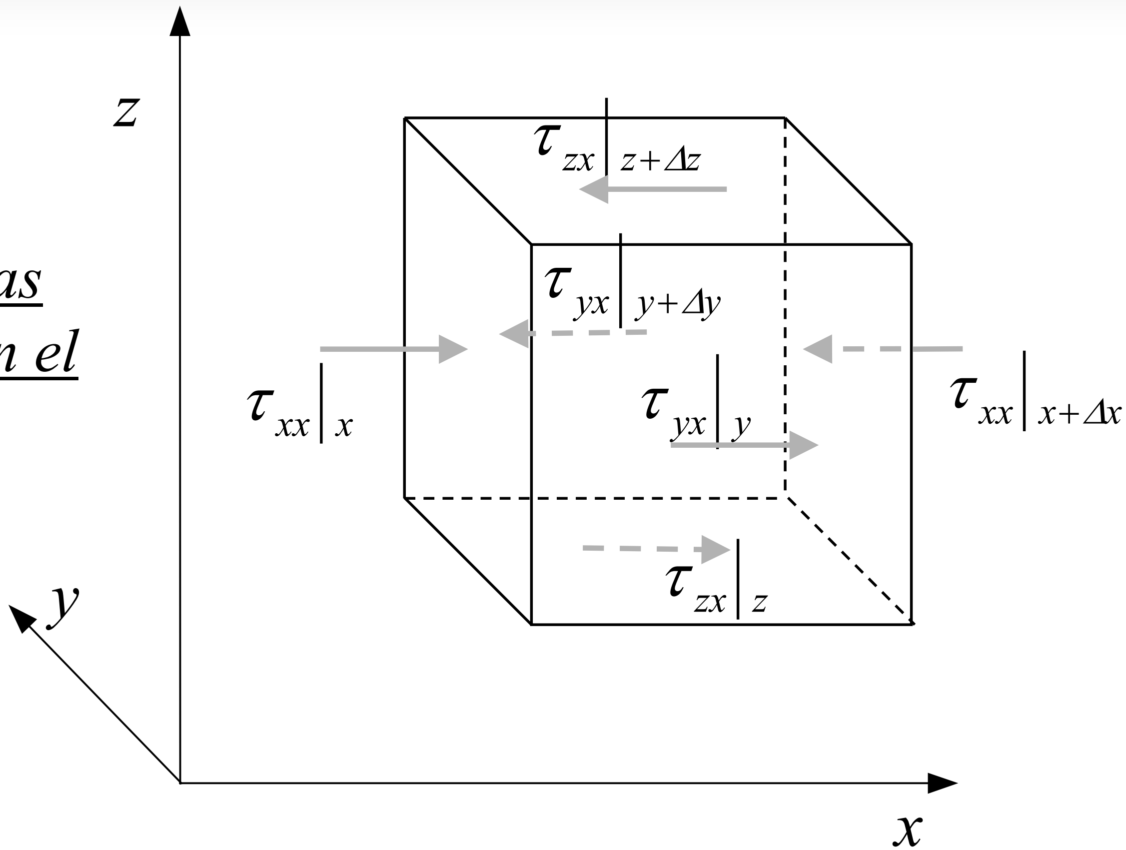
$$\begin{pmatrix} \text{Flujo de mom.} \\ \text{entrante} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{Flujo de mom.} \\ \text{saliente} \end{pmatrix} + \left(\sum \vec{F}_{\text{del sist.}} \right) = \begin{pmatrix} \text{Acumulación de} \\ \text{Flujo de mom.} \end{pmatrix}$$

Por simplicidad consideraremos sólo la componente-x de cada uno de los términos. Las componentes-y, -z, resultan análogas:

Debemos considerar el flujo de momentum combinado total que entra y sale por las superficies del volumen de control por efecto de la componente-x del fluido.

$$\phi_{ij} = \pi_{ij} + \rho \mathrm{v}_i \mathrm{v}_j = p + \tau_{ij} + \rho \mathrm{v}_i \mathrm{v}_j$$

<u>*Fuerzas viscosas causadas por el stress molecular en el volumen de control*</u>

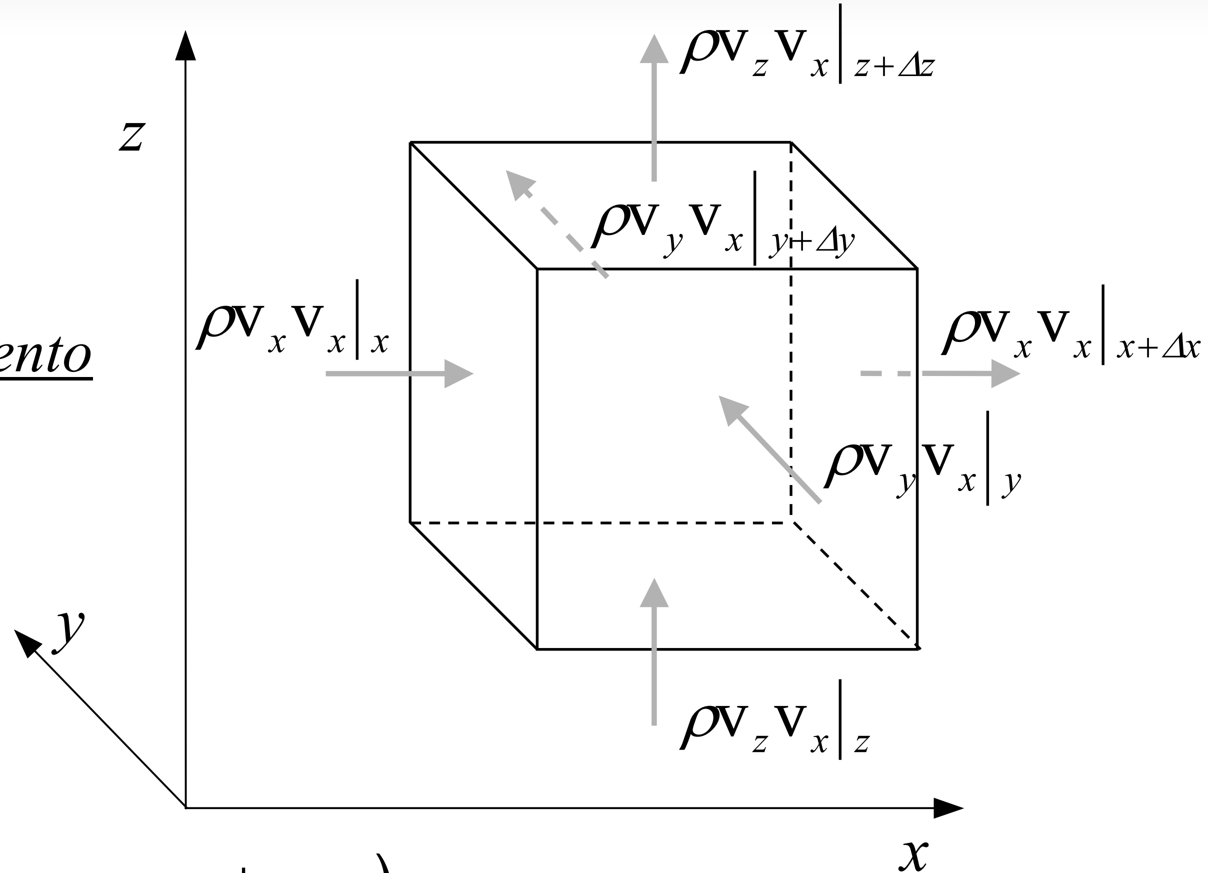


$$\Delta y \Delta z\left(\tau_{xx}\big|_{x} - \tau_{xx}\big|_{x+\Delta x}\right) + \ldots$$

$$\ldots + \Delta x \Delta z\left(\tau_{yx}\big|_{y} - \tau_{yx}\big|_{y+\Delta y}\right) + \ldots$$

$$\ldots + \Delta x \Delta y\left(\tau_{zx}\big|_{z} - \tau_{zx}\big|_{z+\Delta z}\right)$$

Fuerzas convectivas causadas por el movimiento del seno del fluido (momentum-x)



$$\Delta y \Delta z \left(\rho v_x v_x \big|_x - \rho v_x v_x \big|_{x+\Delta x} \right) + \ldots$$

$$\ldots + \Delta x \Delta z \left(\rho v_y v_x \big|_y - \rho v_y v_x \big|_{y+\Delta y} \right) + \ldots$$

$$\ldots + \Delta x \Delta y \left(\rho v_z v_x \big|_z - \rho v_z v_x \big|_{z+\Delta z} \right)$$

Fuerzas del sistema

En la mayoría de los casos, las fuerzas actuando sobre el sistema provienen de la presión P y de la aceleración de gravedad g por unidad de masa. En la dirección-x, estas fuerzas serán:

$$\Delta y \Delta z \left(P\big|_{x} - P\big|_{x+\Delta x} \right)$$

$$\rho g_{x} \Delta x \Delta y \Delta z$$

Finalmente, la acumulación de flujo de momentum-x en el volumen de control es:

$$\Delta x \Delta y \Delta z \left(\frac{\partial}{\partial t} \rho v_{x} \right)$$

Ecuación General de Momentum

Dividiendo por el volumen de control ΔxΔyΔz y haciéndolo tender a 0, se obtiene la ec. de momentum de la componente-x:

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\rho \mathrm{v}_x = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\rho \mathrm{v}_x \mathrm{v}_x + \frac{\partial}{\partial y}\rho \mathrm{v}_y \mathrm{v}_x + \frac{\partial}{\partial z}\rho \mathrm{v}_z \mathrm{v}_x\right) - \ldots$$

$$\ldots - \left(\frac{\partial}{\partial x}\tau_{xx} + \frac{\partial}{\partial y}\tau_{yx} + \frac{\partial}{\partial z}\tau_{zx}\right) - \frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x$$

De manera análoga se obtienen las ecs. de momentum de las componentes-y, -z:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho v_y = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\rho v_x v_y + \frac{\partial}{\partial y}\rho v_y v_y + \frac{\partial}{\partial z}\rho v_z v_y\right) - \dots$$

$$\dots - \left(\frac{\partial}{\partial x}\tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial y}\tau_{yy} + \frac{\partial}{\partial z}\tau_{zy}\right) - \frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho v_z = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\rho v_x v_z + \frac{\partial}{\partial y}\rho v_y v_z + \frac{\partial}{\partial z}\rho v_z v_z\right) - \dots$$

$$\dots - \left(\frac{\partial}{\partial x}\tau_{xz} + \frac{\partial}{\partial y}\tau_{yz} + \frac{\partial}{\partial z}\tau_{zz}\right) - \frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z$$

Ecuación vectorial general de momentum

Utilizando notación vectorial es posible resumir las ecuaciones anteriores. Representación vectorial de la velocidad másica, ρv, y de la aceleración, g, son triviales y conocidas, sin embargo, los términos $\partial P/\partial x, \partial P/\partial y, \partial P/\partial z$ *representan gradientes de presión.*

La presión es una cantidad escalar, pero el gradiente de presión es un vector denotado por ∇P *ó bien grad P.* $\therefore$

$$\nabla P = \frac{\partial}{\partial x} P + \frac{\partial}{\partial y} P + \frac{\partial}{\partial z} P$$

donde:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$$

Ecuación vectorial general de momentum

Expresión general para la ley de conservación de momentum sobre un volumen de control inmerso en un fluido en movimiento:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho \mathrm{v} = -\left(\nabla \cdot \rho \mathrm{v}\mathrm{v}\right) - \nabla P - \left(\nabla \cdot \tau\right) + \rho g$$

Sin embargo, necesitamos relacionar los esfuerzos de corte o componentes viscosos de esta ecuación con los gradientes de velocidad y con las propiedades del fluido para determinar las distribuciones de velocidad:

Para fluidos Newtonianos incorporamos el tensor de esfuerzos, los nueve componentes de τ, 3 relacionados con los esfuerzos normales y 6 relacionados los esfuerzos de corte.

Esfuerzos normales

$$\begin{cases} \tau_{xx} = -2\mu \dfrac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x} + \dfrac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathrm{v}) \\[2ex] \tau_{yy} = -2\mu \dfrac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial y} + \dfrac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathrm{v}) \\[2ex] \tau_{zz} = -2\mu \dfrac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial z} + \dfrac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathrm{v}) \end{cases}$$

Tensor de esfuerzos viscosos de Newton

Esfuerzos de corte

$$\begin{cases} \tau_{xy} = \tau_{yx} = -\mu\left(\dfrac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial x}\right) \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} = -\mu\left(\dfrac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial z} + \dfrac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial y}\right) \\ \tau_{zx} = \tau_{xz} = -\mu\left(\dfrac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial z}\right) \end{cases}$$

Ecuación de Navier Stokes

Esta ecuación asume que tanto la densidad, ρ, como la viscosidad, μ, son constantes y ∴:

$$\nabla \cdot \mathrm{v} = 0$$

$$\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial z} = 0$$

luego:

$$\rho\left[\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial t} + \mathrm{v}_x \frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x} + \mathrm{v}_y \frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial y} + \mathrm{v}_z \frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial z}\right] = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu\left[\frac{\partial^2 \mathrm{v}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{v}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{v}_x}{\partial z^2}\right] + \rho g_x$$

$$\rho\left[\frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial t} + \mathrm{v}_x \frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial x} + \mathrm{v}_y \frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial y} + \mathrm{v}_z \frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial z}\right] = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu\left[\frac{\partial^2 \mathrm{v}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{v}_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{v}_y}{\partial z^2}\right] + \rho g_y$$

$$\rho\left[\frac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial t} + \mathrm{v}_x \frac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial x} + \mathrm{v}_y \frac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial y} + \mathrm{v}_z \frac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial z}\right] = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu\left[\frac{\partial^2 \mathrm{v}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{v}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{v}_z}{\partial z^2}\right] + \rho g_z$$

Ecuación de Navier Stokes

Consideremos un volumen de control de un fluido moviéndose en un espacio sin flujo másico a través de su superficie, los cambios en la componente-x de su velocidad con el tiempo y posición serán:

$$\Delta \mathrm{v}_x = \frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial z}\Delta z$$

Además la componente-x de la aceleración esta definida como:

$$a_x = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta \mathrm{v}_x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\left\{\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial t}\frac{\Delta t}{\Delta t} + \frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta t}\right\}$$

Obteniendo:

$$a_x = \frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial t} + \mathrm{v}_x\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x} + \mathrm{v}_y\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial y} + \mathrm{v}_z\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial z} = \frac{D\mathrm{v}_x}{Dt}$$

Ecuación de Navier Stokes

La ec. Corresponde a la derivada substancial vista como la aceleración sobre el volumen de control. Expresiones análogas existen para las direcciones-y, -z, representando el sistema por las correspondientes 3 derivadas substanciales y ∴:

$$\rho \frac{D\mathrm{v}}{Dt} = -\nabla P + \mu \nabla^2 \mathrm{v} + \rho \mathrm{g}$$

Ec. de Navier-Stokes, que atribuye la Ley de newton en su forma de masa (ρ) por aceleración ($D\mathrm{v}/Dt$) igual a la suma de fuerzas, siendo estas; las fuerzas de presión (∇P), las fuerzas viscosas ($\mu \nabla^2 \mathrm{v}$) y las fuerzas de gravedad o de cuerpo ($\rho \mathrm{g}$).

Table 2.1 The continuity equation in different coordinates systems

Rectangular coordinates (x, y, z):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0 \qquad \text{(A)}$$

Cylindrical coordinates (r, θ, z):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\rho r v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0 \qquad \text{(B)}$$

Spherical coordinates (r, θ, ϕ):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(\rho r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}(\rho v_\phi) = 0 \qquad \text{(C)}$$

*Tables 2.1-2.7 are from R. B. Bird, W. E. Stewart, and E. N. Lightfoot, *Transport Phenomena* Wiley, New York, 1960, pages 83-91. Reprinted by permission.

Ecuación de Navier Stokes

Table 2.2 The momentum equation in rectangular coordinates (x, y, z)

In terms of τ:

x-component
$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right) = -\frac{\partial P}{\partial x} - \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right) + \rho g_x \qquad \text{(A)}$$

y-component
$$\rho\left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right) = -\frac{\partial P}{\partial y} - \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right) + \rho g_y \qquad \text{(B)}$$

z-component
$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = -\frac{\partial P}{\partial z} - \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}\right) + \rho g_z \qquad \text{(C)}$$

Ecuación de Navier Stokes

In terms of velocity gradients for a Newtonian fluid with constant ρ and μ:

x-component $$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right) + \rho g_x \qquad \text{(D)}$$

y-component $$\rho\left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right) + \rho g_y \qquad \text{(E)}$$

z-component $$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right) + \rho g_z \qquad \text{(F)}$$

Table 2.3 The momentum equation in cylindrical coordinates (r, θ, z)

In terms of τ:

r-component*

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z}\right) = -\frac{\partial P}{\partial r} - \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{rr}) + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z}\right) + \rho g_r \qquad \text{(A)}$$

θ-component

$$\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right) = -\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta} - \left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\tau_{r\theta}) + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z}\right) + \rho g_\theta \qquad \text{(B)}$$

z-component

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = -\frac{\partial P}{\partial z} - \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{rz}) + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}\right) + \rho g_z \qquad \text{(C)}$$

Ecuación de Navier Stokes

In terms of velocity gradients for a Newtonian fluid with constant ρ and μ:

r-component*

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}\right) = -\frac{\partial P}{\partial r}$$

$$+ \mu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r)\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}\right] + \rho g_r \qquad \text{(D)}$$

θ-component

$$\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right) = -\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta}$$

$$+ \mu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta)\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}\right] + \rho g_\theta \qquad \text{(E)}$$

z-component

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = -\frac{\partial P}{\partial z}$$

$$+ \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right] + \rho g_z \qquad \text{(F)}$$

---

*The term $\rho v_\theta^2/r$ is the *centrifugal force*. It gives the effective force in the r-direction resulting from fluid motion in the θ-direction. This term arises automatically on transformation from rectangular to cylindrical coordinates; it does not have to be added on physical grounds.

Ecuación de Navier Stokes

Table 2.4 The momentum equation in spherical coordinates (r, θ, ϕ)

In terms of τ:

r-component

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r}\right)$$

$$= -\frac{\partial P}{\partial r} - \left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\tau_{rr}) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\tau_{r\theta}\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\tau_{r\phi}}{\partial\phi} - \frac{\tau_{\theta\theta}+\tau_{\phi\phi}}{r}\right) + \rho g_r \qquad \text{(A)}$$

θ-component

$$\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\phi^2\cot\theta}{r}\right)$$

$$= -\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta} - \left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\tau_{r\theta}) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\tau_{\theta\theta}\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\tau_{\theta\phi}}{\partial\phi} + \frac{\tau_{r\theta}}{r} - \frac{\cot\theta}{r}\tau_{\phi\phi}\right) + \rho g_\theta \qquad \text{(B)}$$

ϕ-component

$$\rho\left(\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_\phi v_r}{r} + \frac{v_\theta v_\phi}{r}\cot\theta\right)$$

$$= -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial P}{\partial \phi} - \left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\tau_{r\phi}) + \frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{\theta\phi}}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\tau_{\phi\phi}}{\partial\phi} + \frac{\tau_{r\phi}}{r} + \frac{2\cot\theta}{r}\tau_{\theta\phi}\right) + \rho g_\phi \qquad \text{(C)}$$

Ecuación de Navier Stokes

In terms of velocity gradients for a Newtonian fluid with constant ρ and μ:

r-component

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r}\right) = -\frac{\partial P}{\partial r} + \mu\left(\nabla^2 v_r - \frac{2}{r^2}v_r - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2}v_\theta\cot\theta - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}\right) + \rho g_r \quad \text{(D)}$$

θ-component

$$\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\phi^2\cot\theta}{r}\right) = -\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta} + \mu\left(\nabla^2 v_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2\sin^2\theta} - \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}\right) + \rho g_\theta \quad \text{(E)}$$

ϕ-component

$$\rho\left(\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_\phi v_r}{r} + \frac{v_\theta v_\phi}{r}\cot\theta\right) = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial P}{\partial \phi} + \mu\left(\nabla^2 v_\phi - \frac{v_\phi}{r^2\sin^2\theta} + \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}\right) + \rho g_\phi \quad \text{(F)}$$

Table 2.5 Components of the stress tensor in rectangular coordinates (x, y, z)

$\tau_{xx} = -\mu\left[2\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{v})\right]$	(A)
$\tau_{yy} = -\mu\left[2\frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{v})\right]$	(B)
$\tau_{zz} = -\mu\left[2\frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{v})\right]$	(C)
$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\mu\left[\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right]$	(D)
$\tau_{yz} = \tau_{zy} = -\mu\left[\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right]$	(E)
$\tau_{zx} = \tau_{xz} = -\mu\left[\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right]$	(F)
$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$	(G)

Ecuación de Navier Stokes

Table 2.6 Components of the stress tensor in cylindrical coordinates (r, θ, z)

$$\tau_{rr} = -\mu\left[2\frac{\partial v_r}{\partial r} - \tfrac{2}{3}(\nabla\cdot v)\right] \quad \text{(A)}$$

$$\tau_{\theta\theta} = -\mu\left[2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}\right) - \tfrac{2}{3}(\nabla\cdot v)\right] \quad \text{(B)}$$

$$\tau_{zz} = -\mu\left[2\frac{\partial v_z}{\partial z} - \tfrac{2}{3}(\nabla\cdot v)\right] \quad \text{(C)}$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = -\mu\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right] \quad \text{(D)}$$

$$\tau_{\theta z} = \tau_{z\theta} = -\mu\left[\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}\right] \quad \text{(E)}$$

$$\tau_{zr} = \tau_{rz} = -\mu\left[\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}\right] \quad \text{(F)}$$

$$(\nabla\cdot v) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad \text{(G)}$$

Table 2.7 Components of the stress tensor in spherical coordinates (r, θ, ϕ)

$$\tau_{rr} = -\mu\left[2\frac{\partial v_r}{\partial r} - \tfrac{2}{3}(\nabla \cdot v)\right] \quad \text{(A)}$$

$$\tau_{\theta\theta} = -\mu\left[2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}\right) - \tfrac{2}{3}(\nabla \cdot v)\right] \quad \text{(B)}$$

$$\tau_{\phi\phi} = -\mu\left[2\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot\theta}{r}\right) - \tfrac{2}{3}(\nabla \cdot v)\right] \quad \text{(C)}$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = -\mu\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right] \quad \text{(D)}$$

$$\tau_{\theta\phi} = \tau_{\phi\theta} = -\mu\left[\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{v_\phi}{\sin\theta}\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\phi}\right] \quad \text{(E)}$$

$$\tau_{\phi r} = \tau_{r\phi} = -\mu\left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\phi} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\phi}{r}\right)\right] \quad \text{(F)}$$

$$(\nabla \cdot v) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(v_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi} \quad \text{(G)}$$