



# *FENOMENOS DE TRANSPORTE EN METALURGIA*

*INTRODUCCIÓN Y FUNDAMENTOS*

*Clase 03/03*

*Prof. Dr. Leandro Voisin A.*

## Generalización de la ley de viscosidad de Newton

$$\tau_{ij} = A \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + B \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \cdot \delta_{ij}$$

- *Se quiere reducir esta ecuación a aquella simplificada de la viscosidad de Newton, así:*

$$\tau_{ij} = A \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \Rightarrow A = -\mu$$

- *Finalmente, la constante escalar B se fija igual a  $2/3\mu - \kappa$ . donde  $\kappa$  se define como la viscosidad dilatacional. Para gases mono atómicos a baja densidad,  $\kappa = 0$ .*



## Generalización de la ley de viscosidad de Newton

- *Se obtiene un conjunto de 9 relaciones (6 independientes) que generalizan la ley de viscosidad de Newton.*

$$\tau_{ij} = -\mu \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \left( \frac{2}{3} \mu - \kappa \right) \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \delta_{ij}$$

- *donde  $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ ,  $i$  y  $j$  toman los valores 1,2,3.*
- *Estas relaciones para los esfuerzos se asocian con los nombres de Navier, Poisson y Stokes.*
- *En notación vectorial-tensorial, estas relaciones se expresan:*

$$\boldsymbol{\tau} = -\mu (\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T) + \left( \frac{2}{3} \mu - \kappa \right) (\nabla \cdot \mathbf{v}) \boldsymbol{\delta}$$

## Generalización de la ley de viscosidad de Newton

$$\boldsymbol{\tau} = -\mu(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T) + \left(\frac{2}{3}\mu - \kappa\right)(\nabla \cdot \mathbf{v})\boldsymbol{\delta}$$

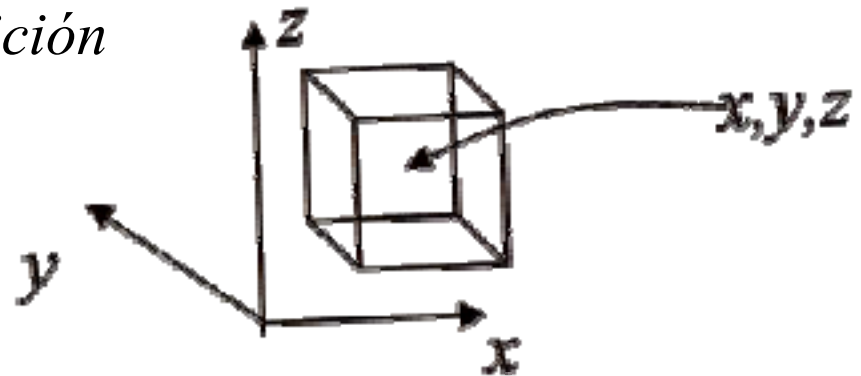
donde:

- $\boldsymbol{\delta}$  : *tensor unitario, con componentes  $\delta_{ij}$ .*  
 $\nabla \mathbf{v}$  : *tensor de gradiente de velocidad,*  
 $(\nabla \mathbf{v})^T$  : *transpuesta del tensor de gradiente de velocidad.*  
 $(\nabla \cdot \mathbf{v})$  : *divergencia del vector de velocidad.*

- *En el estudio de gases, se puede asumir que se comportan como gases monoatómicos ideales y  $\kappa = 0$ .*
- *En el estudio de líquidos, asumiremos que se trata de fluidos incompresibles por lo que la divergencia del vector de velocidad es 0.*

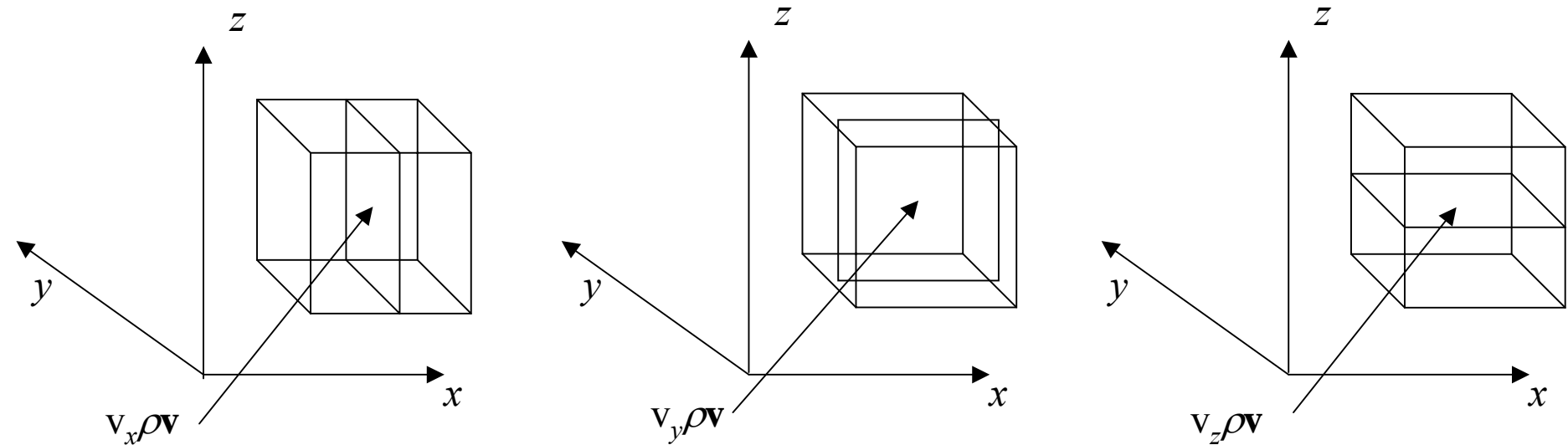
- *Hasta ahora hemos visto transporte molecular de momentum.  $\pi_{ij}$  representa el flujo de momentum- $j$  a través de una superficie perpendicular a la dirección  $i$ .*
- *Además, se puede transportar momentum por el movimiento del seno del fluido. Esto se denomina transporte convectivo.*

*Consideremos nuevamente el elemento de volumen cúbico de cara unitaria cuyo centro se encuentra en la posición  $x, y, z$ . El fluido tiene velocidad  $v$ .*



La tasa de flujo volumétrico a través de cada superficie es  $V_x$ ,  $V_y$ ,  $V_z$  respectivamente.

El fluido, lleva consigo momentum  $\rho v$  por unidad de volumen. Por lo tanto el flujo de momentum a través cada superficie es  $V_x \rho v$ ,  $V_y \rho v$ ,  $V_z \rho v$ .



Dirección normal a la superficie	Flujo de momentum a través de la superficie	Componente del flujo de momentum		
		Comp. - x	Comp. - y	Comp. - z
x	$\rho V_x V$	$\rho V_x V_x$	$\rho V_x V_y$	$\rho V_x V_z$
y	$\rho V_y V$	$\rho V_y V_x$	$\rho V_y V_y$	$\rho V_y V_z$
z	$\rho V_z V$	$\rho V_z V_x$	$\rho V_z V_y$	$\rho V_z V_z$

*Flujo de momentum por unidad de volumen actuando a través de cada superficie de un volumen de control cúbico, coordenadas cartesianas.*

*En notación compacta, los nueve escalares de la tabla anterior representando las componentes de los flujos convectivos de momentum se expresan por la siguiente ecuación:*

$$\rho \mathbf{v} \mathbf{v} = \sum_i \sum_j \delta_i \delta_j \rho v_i v_j$$



*El transporte de momentum combinado corresponde a la suma de flujo de momentum molecular y del flujo convectivo de momentum:*

$$\phi_{ij} = \pi_{ij} + \rho v_i v_j = p + \tau_{ij} + \rho v_i v_j$$

*Los componentes de  $\phi$  son:*

$$\phi_{xx} = \pi_{xx} + \rho v_x v_x = p + \tau_{xx} + \rho v_x v_x$$

$$\dots \phi_{yy}, \phi_{zz}$$

$$\phi_{xy} = \pi_{xy} + \rho v_x v_y = \tau_{xy} + \rho v_x v_y$$

$$\dots \phi_{xz}, \phi_{yx}, \phi_{yz}, \phi_{zx}, \phi_{zy}$$

*Cuando un flujo es laminar, el fluido se mueve suavemente con una distribución geométrica de velocidad de líneas paralelas (también llamadas líneas de corriente)*

*A altas velocidades ó cuando hay obstáculos físicos presentes, el flujo es turbulento y presenta un comportamiento inestable con una distribución de velocidad irregular.*

*Dependiendo del grado de turbulencia, el fluido podrá moverse de manera errática con violentos remolinos y flujos cruzados.*

*En fluidodinámica, la clasificación general de los fluidos de acuerdo a su distribución de velocidad está determinada por el número adimensional de Reynolds.*

*Basado en resultados experimentales del comportamiento de varios fluidos y con diferentes geometrías, se ha encontrado que el flujo puede ser caracterizado por el número adimensional de Reynolds definido como:*

$$Re = \frac{Dv\rho}{\mu} = \frac{Dv}{\nu}$$

*donde:*

*D - diámetro de la cañería ó diámetro equivalente en otro tipo de geometría.*

*v - velocidad del fluido*

*$\rho$  - densidad del fluido*

*$\mu$  - viscosidad del fluido*

*$\nu$  - viscosidad cinemática de fluido*

	<i>Cañería</i>	<i>Placa plana</i>	<i>Régimen</i>
<i>Re</i>	<i>&lt; 2100</i>	<i>&lt; 3·10<sup>5</sup></i>	<i>Laminar</i>
	<i>&gt; 4000</i>	<i>&gt; 3·10<sup>6</sup></i>	<i>Turbulento</i>

## Flujo volumétrico en una cañería

$$Q = A \cdot v = \frac{\pi D^2 v}{4} \quad \Rightarrow \quad Re = \frac{4 \cdot Q}{\pi D \nu}$$

*donde:*

*D* - *diámetro de la cañería.*

*v* - *velocidad del fluido*

*A* - *sección transversal al flujo del fluido*

*ν* - *viscosidad cinemática del fluido*

## Ejemplo 2:

*Determine el régimen de un flujo de agua que fluye a través de una cañería de 0.1 m de diámetro a una velocidad de 0.1 m/s y 27°C. ¿Qué sucede si el flujo es aire?.*

## Ejemplo 2, Solución:

*A la temperatura indicada:  $v_{aire} = 15.8 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $v_{agua} = 0.86 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ . Los números de Reynolds para cada caso son:*

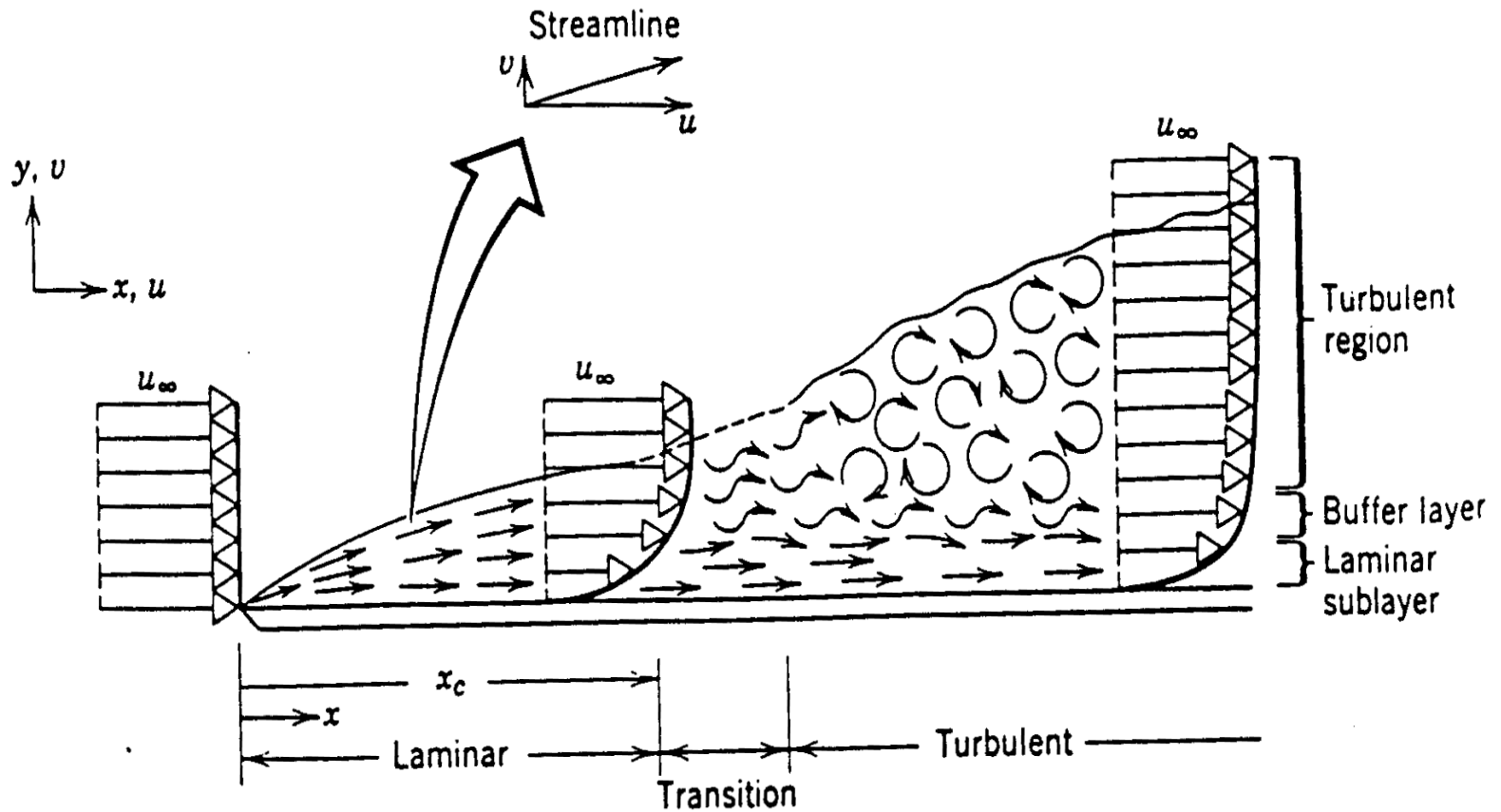
$$Re_{aire} = \frac{0.1 \text{ m} \cdot 0.1 \text{ m/s}}{15.8 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}} = 633 \qquad Re_{agua} = \frac{0.1 \text{ m} \cdot 0.1 \text{ m/s}}{0.86 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}} = 11300$$

*Se puede ver que en el caso del aire el flujo es laminar mientras que en el caso del agua el flujo es turbulento.*



- ✓ *Cuando se analiza el flujo de un fluido es importante comprender el comportamiento del flujo adyacente a la superficie sólida.*
- ✓ *La razón es que el flujo en esta delgada capa determina las fuerzas de fricción y las tasas de transferencia de calor y masa.*
- ✓ *El primer paso es determinar si el flujo es laminar ó turbulento.*
- ✓ *Consideremos el flujo a lo largo de una placa plana horizontal. Antes de contactar la placa, la velocidad del fluido es uniforme. En su contacto la velocidad es cero, y un gradiente de velocidad se desarrolla en la dirección normal a la placa.*

# Capa límite



- ✓ *El fluido experimenta el arrastre viscoso. Éste y el consecuente gradiente en la dirección resultan en lo que se conoce como capa límite.*
- ✓ *La superficie superior de la capa límite es definida en la ubicación y, donde  $U(v) = 0,99 v$ .*
- ✓ *Se puede observar que el fluido procede a lo largo de la placa y la capa límite incrementa en su espesor.*
- ✓ *Inicialmente el flujo dentro de la capa límite es laminar, luego una región de transición y posteriormente una zona turbulenta.*



*En régimen laminar se ha derivado la siguiente expresión para calcular el espesor de la capa límite:*

$$\delta = \frac{4.64 x}{\sqrt{Re}} = 4.64 \sqrt{\frac{\nu x}{v}}$$

*donde:*

*x - distancia (m) desde el borde inicial*

*Se puede observar que el espesor de la capa límite incrementa con la raíz cuadrada de la distancia a lo largo de la placa.*



*Existen varios modelos empíricos que se utilizan para determinar la viscosidad en los gases. En general ellos son validos para  $P^0$  inferiores a 10 atm., en donde la viscosidad resulta ser sólo dependiente de la  $T^0$ .*

*Ecuación de viscosidad para gases no polares a bajas presiones desarrollada por Chapman & Enskog.*

$$\mu = 2.67 \cdot 10^{-5} \frac{\sqrt{MT}}{\sigma^2 \Omega_{\mu}}$$

*donde:*

$\mu$ - viscosidad del gas, poises

$M$ - peso molecular del gas, g/mol

$T$  - temperatura, K

$\sigma$  - diámetro característico de la molécula, Å

$\Omega_{\mu}$  - integral de colición

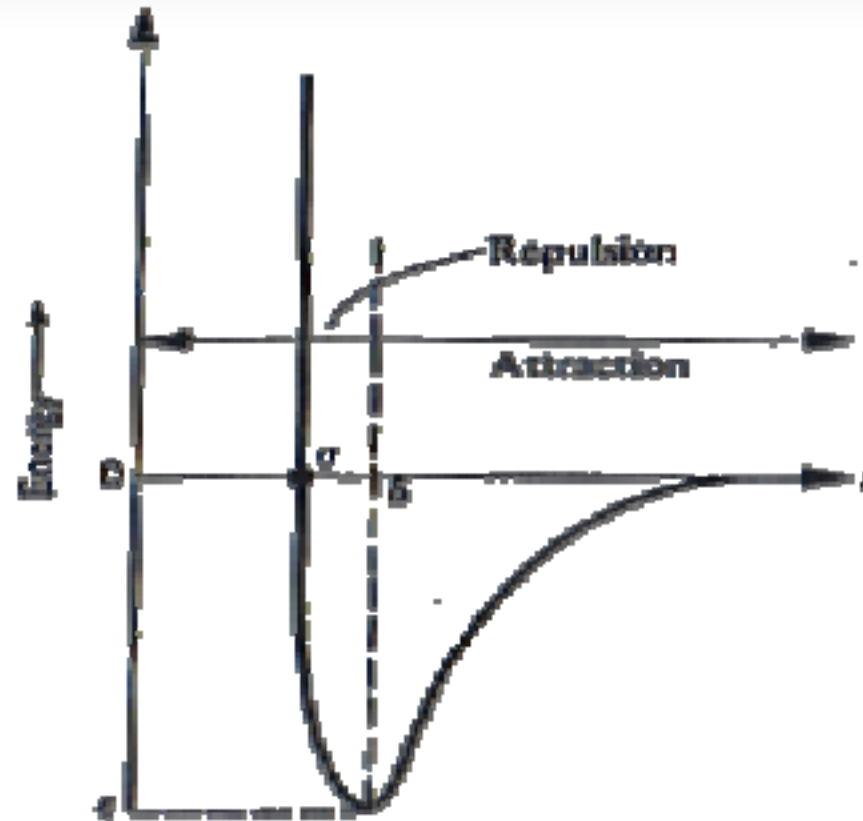
**Table 1.1 Intermolecular force parameters and critical properties**

Substance	Molecular weight, M	Lennard-Jones parameters*		Critical constants*	
		$\sigma$ , Å	$\epsilon/\kappa_B$ , K	$T_c$ , K	$\hat{V}_c$ , cm <sup>3</sup> /mo
<i>Light elements</i>					
H <sub>2</sub>	2.016	2.827	59.7	33.2	65.1
He	4.003	2.551	10.32	5.19	57.4
<i>Noble gases</i>					
Ne	20.183	2.820	32.8	44.4	41.6
Ar	39.948	3.542	93.3	150.8	74.9
Kr	83.80	3.655	178.9	209.4	91.2
Xe	131.3	4.047	231.0	289.7	118.4
<i>Polystomic gases</i>					
Air	28.97	3.711	78.6	-	-
N <sub>2</sub>	28.013	3.798	71.4	126.2	89.8
O <sub>2</sub>	32.00	3.467	106.7	154.6	90.4
CO	28.01	3.690	91.7	132.9	93.2
CO <sub>2</sub>	44.01	3.941	195.2	304.1	93.9
H <sub>2</sub> O	18.02	2.641	809.1	647.3	57.1
SO <sub>2</sub>	64.06	4.112	335.4	430.8	122.2
F <sub>2</sub>	38.00	3.357	112.6	144.3	66.3
Cl <sub>2</sub>	70.91	4.217	316.0	416.9	123.8
Br <sub>2</sub>	159.81	4.296	507.9	588	127.2
CH <sub>4</sub>	16.04	3.758	148.6	190.4	99.2

**Table 1.2 Values of  $\Omega$ -integral for viscosity and of the viscosity function  $f(\kappa_p T/\epsilon)$ , based on the Lennard-Jones potential\***

$\kappa_p T/\epsilon$	$\Omega_v$	$f(\kappa_p T/\epsilon)$	$\kappa_p T/\epsilon$	$\Omega_v$	$f(\kappa_p T/\epsilon)$
0.3	2.785	0.1969	6.0	0.8963	2.751
0.4	2.492	0.2540	8.0	0.8538	3.337
0.5	2.257	0.3134	10	0.8242	3.866
0.6	2.065	0.3751	20	0.7432	6.063
0.7	1.908	0.4384	40	0.6718	9.488
0.8	1.780	0.5025	60	0.6335	12.324
0.9	1.675	0.5666	80	0.6076	14.839
1.0	1.587	0.6302	100	0.5882	17.137
2.0	1.175	1.2048	200	0.5320	26.80
4.0	0.9700	2.0719	400	0.4811	41.90

\*J. O. Hirschfelder, C. F. Curtiss, and R. B. Bird, *Molecular Theory of Gases and Liquids*, Wiley, New York, 1954.



**Fig. 1.6 Lennard-Jones potential function describing the interaction of two nonpolar molecules.**

- donde:
- $\delta$  - posición de las moléculas
  - $\varepsilon$  - parámetro de energía característico
  - $\kappa_B$  - constante de Boltzmann  $\cong 1.38065 \cdot 10^{-23}$  J/K

## Ejemplo 3:

*Determine la viscosidad del hidrógeno a 1 atm y 1364 K.*

## Ejemplo 3, Solución:

*Desde la tabla 1.1 encontramos los siguientes parámetros:*

$$\varepsilon / \kappa_B = 59.7 K$$

$$\sigma = 2.827 \text{ \AA}$$

*De la tabla 1.2, determinamos la integral de colisión:*

$$\Omega_\mu \cong 0.733$$

$$\Rightarrow \mu_{\text{H}_2} = 2.67 \cdot 10^{-5} \frac{\sqrt{(2)(1364)}}{(2.827)^2 (0.733)} = 2.38 \cdot 10^{-4} \text{ poise}$$

*Cuando no conocemos los valores de  $\sigma$  y  $\varepsilon/\kappa_B$ , la viscosidad del gas puede ser calculada mediante el modelo de Bromley & Wilke:*

$$\mu = 3.33 \cdot 10^{-5} \frac{\sqrt{MT_c}}{\bar{V}_c^{2/3}} \cdot f\left(\frac{\kappa_B T}{\varepsilon}\right)$$

*donde:*

- $\mu$  - viscosidad del gas, poises
- $M$  - peso molecular del gas, g/mol
- $T_c$  - temperatura crítica, K
- $\bar{V}_c$  - volumen molar crítico, cm<sup>3</sup>/mol
- $f\left(\frac{\kappa_B T}{\varepsilon}\right)$  - función empírica

*Ecuación de viscosidad para sistemas multi-componentes, mezclas de gases a baja densidad. Ecuación de Wilke.*

$$\mu_{mix} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \mu_i}{\sum_{j=1}^n x_j \Phi_{ij}}$$

*siendo:*

$$\Phi_{ij} = \frac{1}{\sqrt{8}} \left( 1 + \frac{M_i}{M_j} \right)^{-1/2} \left[ 1 + \left( \frac{\mu_i}{\mu_j} \right)^{1/2} \left( \frac{M_j}{M_i} \right)^{1/4} \right]^2$$

*donde:*

- $n$  - número de especies químicas en la mezcla
- $x_i, x_j$  - fracciones molares de las especies  $i$  y  $j$
- $\mu_i, \mu_j$  - viscosidades de las especies  $i$  y  $j$  a la  $T^0$  y  $P^0$  del sistema
- $M_i, M_j$  - pesos moleculares de  $i$  y  $j$
- $\Phi_{ij}$  - parámetro adimensional. Para  $i=j \Rightarrow \Phi_{ij}=1$



## Ejemplo 4:

Dadas las viscosidades de los componentes puros, determinar la viscosidad de una mezcla gaseosa compuesta por 20%  $\text{CO}_2$ , 50%  $\text{CO}$  y 30%  $\text{He}$  a 800K y  $10^5 \text{ N/m}^2$ .

## Ejemplo 4, Solución:

$i$	$x_i$	$M_i$ g/mol	$\mu_i$ Ns/m <sup>2</sup>
1 ( $\text{CO}_2$ )	0.2	44.011	$3.37 \cdot 10^{-5}$
2 ( $\text{CO}$ )	0.5	28.011	$3.43 \cdot 10^{-5}$
3 ( $\text{He}$ )	0.3	4.003	$3.82 \cdot 10^{-5}$

Debemos calcular los valores del parámetro  $\Phi_{ij}$  y luego encontrar los denominadores de la ec. de Wilke:

# Viscosidad de los gases

$i$	$j$	$M_i/M_j$	$\mu_i/\mu_j$	$\Phi_{ij}$	$\sum_{j=1}^3 x_j \Phi_{ij}$
1	1	1.000	1.000	1.000	0.6625
	2	1.571	0.982	0.784	
	3	10.994	0.882	0.235	
2	1	0.636	1.018	1.254	0.8447
	2	1.000	1.000	1.000	
	3	6.998	0.898	0.313	
3	1	0.091	1.133	2.921	2.1042
	2	0.143	1.114	2.440	
	3	1.000	1.000	1.000	

$$\Rightarrow \mu_{\text{mix}} = \frac{(0.2)(3.37 \cdot 10^{-5})}{0.6625} + \frac{(0.5)(3.43 \cdot 10^{-5})}{0.8447} + \frac{(0.3)(3.82 \cdot 10^{-5})}{2.1042}$$

$$\Rightarrow \mu_{\text{mix}} = 3.59 \cdot 10^{-5} \text{ Ns} / \text{m}^2$$



- ✓ *Los modelos de Chapman & Enskog, Bromley & Wilke y Wilke son validas para determinar viscosidades de gases no polares con bajas densidades y mezclas de ellos respectivamente en rangos de temperatura entre 100 y 1500 K..*
- ✓ *Éstos modelos no pueden ser utilizados para calcular viscosidades de gases polares o moléculas con alta elongación tales como el  $H_2O$ ,  $NH_3$ ,  $CH_3OH$  y  $NOCl$ .*
- ✓ *La mayoría de los gases presenta una viscosidad con un comportamiento similar considerando presiones límites de 10 atm.*
- ✓ *La viscosidad de los gases incrementa con la temperatura y no depende necesariamente de su peso molecular.*

# Viscosidad de los gases

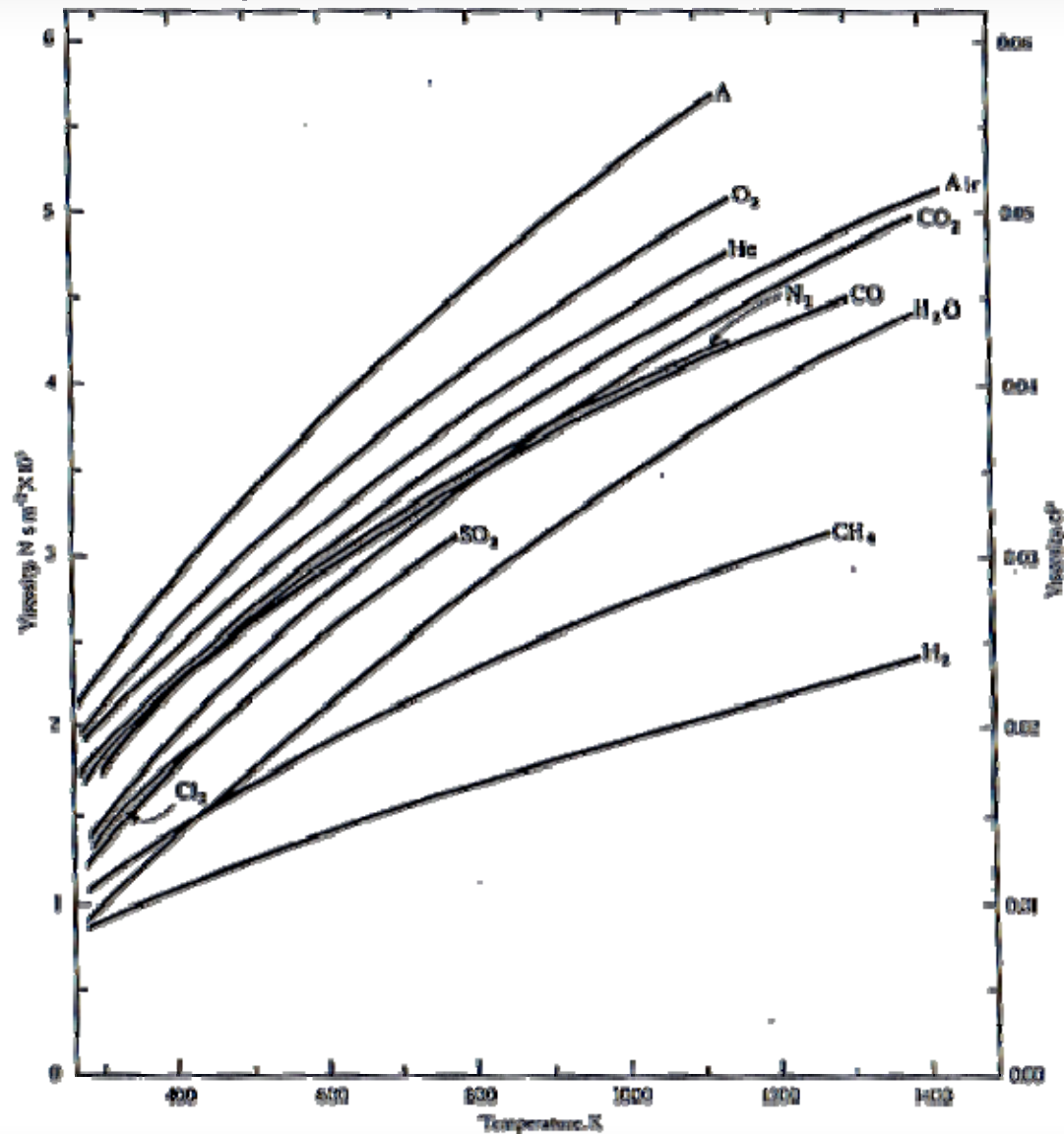


Fig. 1.7 The viscosity of common gases at 1 atm. (Curves drawn from data given in A. Schack, *Industrial Heat Transfer*, sixth edition, Wiley, New York, 1965, and *Handbook of Chemistry and Physics*, 52nd edition, The Chemical Rubber Co., Cleveland, 1971.)