

# TRANSFERENCIA DE MOMENTUM

*MI3010-1 Fenómenos de Transporte en Metalurgia Extractiva*  
*Prof. Dr. Leandro Voisin A.*

*Clase #6*

# Flujo turbulento en una cañería

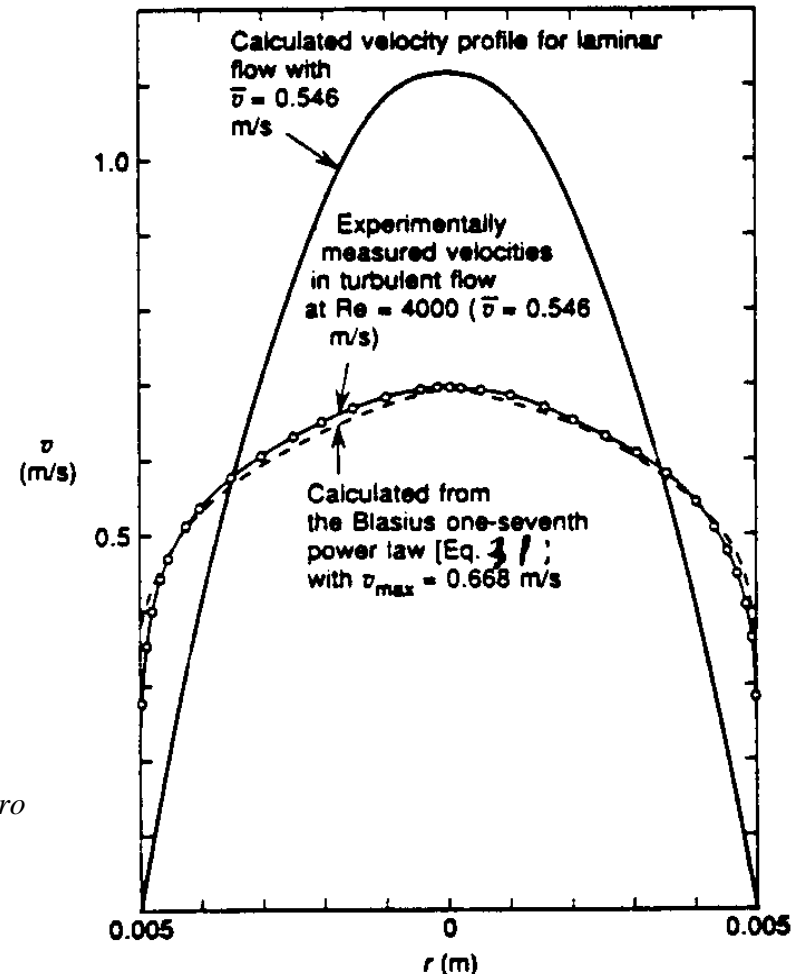
Para flujo turbulento  $Re > 4000$

La ecuación de Blasius permite calcular el perfil de velocidad definido por la ecuación semi-empírica:

$$v(r) = \left(\frac{R-r}{R}\right)^{\frac{1}{7}} v_{centro} = \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{7}} v_{centro}$$

La velocidad promedio se define:

$$V_{promedio} = \frac{V_{centro}}{\pi R^2} \int_0^R \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{7}} 2\pi r dr = 0.817 v_{centro}$$



# Factor de fricción en una cañería

•Un fluido al fluir experimenta fricción y debe realizar trabajo para que fluya. Las pérdidas por fricción se calculan mediante el factor de fricción( $f$ )

$$f = \frac{\text{fuerza fricción}}{\text{área mojada} \frac{1}{2} \rho v^2} = \frac{\text{fuerza fricción}}{\pi D L (\frac{1}{2} \rho v^2)}$$

•Para sobrepasar la fuerza de fricción sobre una cierta longitud de cañería se aplica una caída de presión  $\Delta P$ .

$$\Delta P_f = \frac{\text{fuerza de fricción}}{\frac{1}{4} \pi D^2} = \frac{4 f L}{D} \times \frac{1}{2} \rho v^2$$

•Las pérdidas por fricción ( $E_f$ ) por unidad de masa se definen como la caída de presión dividido por la densidad del fluido

$$E_f \left( \frac{J}{kg} \right) = \frac{\Delta P_f}{\rho} = \frac{4 f L v^2}{2 D}$$

# *Pérdidas por fricción para flujo laminar*

• *Para flujo laminar en una cañería la caída de presión está dada por:*

$$\Delta P_f = \frac{32 \mu L u_{promedio}}{D^2}$$

• *Expresada en términos del factor de fricción es:*

• *Donde:*

$$f = \frac{16 \mu}{\rho D u_{promedio}} = \frac{16 \nu}{D u_{promedio}} = \frac{16}{Re}$$

*D = diámetro*

*u<sub>promedio</sub> = velocidad promedio en la cañería*

*Este factor de fricción es casi independiente de la rugosidad de la cañería*

# Factor de fricción para flujo turbulento en una cañería

Para flujo turbulento el factor de fricción depende del número de  $Re$  y de la rugosidad de la cañería.

Para tubos lisos y  $Re$  entre 4000 y  $10^5$  se puede usar la ecuación siguiente:

$$f = 0.0791 Re^{-\frac{1}{4}}$$

Para tubos lisos y  $Re > 3,4 \cdot 10^6$  se puede usar esta otra ecuación.

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = \log(Re \sqrt{f}) + 0.1$$

Cualquier rugosidad de la pared aumenta el factor de fricción e incrementa las pérdidas de presión. En estos casos se debe incorporar la rugosidad de la superficie ( $\varepsilon$ ).

$$f = \frac{1}{\left\{ -3.6 \times \log \left[ \left( \frac{\varepsilon}{3.7 D} \right)^{1.11} + \frac{6.9}{Re} \right] \right\}^2}$$

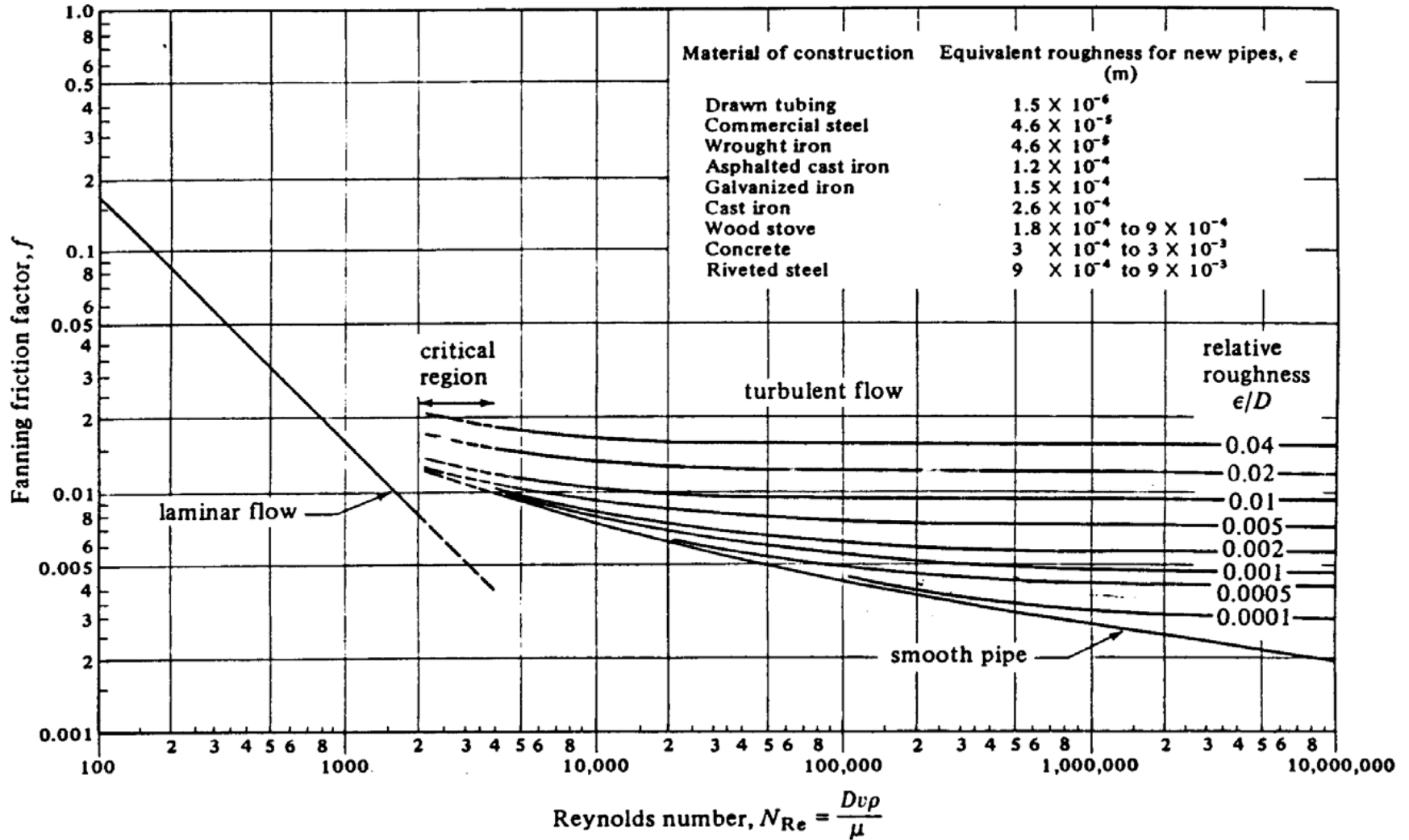
# *Factor de fricción para flujo turbulento en una cañería -*

*Rugosidad típica de varios materiales en tubos y cañerías*

<b><i>Material</i></b>	<b><i>Rugosidad (<math>\varepsilon</math>), mm</i></b>
<i>Tubos pulidos</i>	<i>0.0015</i>
<i>Acero comercial</i>	<i>0.046</i>
<i>Hierro galvanizado</i>	<i>0.15</i>
<i>Hierro fundido</i>	<i>0.26</i>
<i>Concreto</i>	<i>0.3 - 3</i>

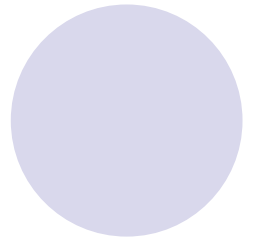
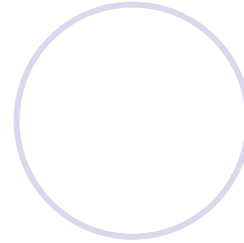
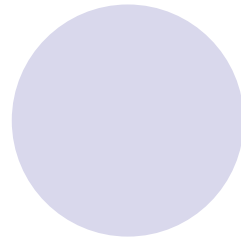
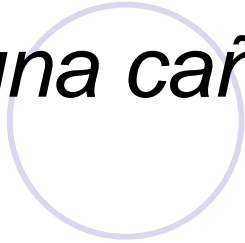
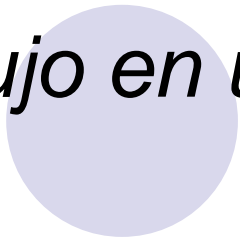
*La figura siguiente muestra un diagrama log - log del factor de fricción versus el número de Re para varias razones  $\varepsilon/D$ . La más común de las cañerías de acero comercial tiene una rugosidad de  $\varepsilon = 4,6 \cdot 10^{-5}$  m.*

# Flujo en una cañería



Factor de fricción versus el número de  $Re$  y rugosidad de la cañería

# *Flujo en una cañería*



- *El factor de fricción descrito corresponde la factor denominado de Fanning.*
- *En algunos textos se usa un factor de fricción 4 veces más grande, por lo que se debe tener cuidado cuando se usen datos al respecto.*
- *En régimen turbulento las líneas más bajas del grafico representan el factor de fricción para tubos y cañerías hechas de vidrio, cobre ó bronce pulidos.*



# Ejemplo

Un líquido fluye por una cañería horizontal recta de acero comercial a 5,5 m/s. El diámetro interior de la cañería es de 5,3 cm. La viscosidad del líquido es  $4,5 \cdot 10^{-3}$  Pa·s y la densidad es de  $820 \text{ kg/m}^3$ . Calcular:

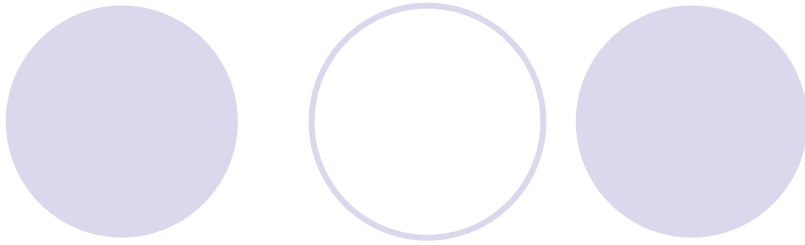
- La caída de presión
- Las pérdidas por fricción en una sección de 50 m de cañería.

**Solución:**

El primer paso es determinar si el flujo es laminar ó turbulento.

El flujo es turbulento. Para una cañería comercial la rugosidad es  $4,6 \cdot 10^{-5}$

De la figura el factor de fricción es 0,006


$$Re = \frac{D\rho u}{\mu} = \frac{0.053 \cdot 820 \cdot 5.5}{4.5 \cdot 10^{-3}} = 53100$$

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{4,6 \cdot 10^{-5}}{0.053} = 0,00087$$

$$\Delta P_f = \frac{4fL}{D} * \frac{1}{2} \rho u^2 = \frac{4 \cdot 0,006 \cdot 50}{0,053} * \left( \frac{1}{2} * 820 * 5,5^2 \right) = 280 \text{ kPa}$$

$$E_f = \frac{\Delta P_f}{\rho} = \frac{280 \text{ kPa}}{820 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} = 340 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

# *Balance de Energía en un flujo de fluido*

*Para mover un fluido por una cañería a una cierta velocidad se requiere un balance energía. Este lleva una energía interna, una energía cinética y energía potencial, adicionalmente al moverse hace un trabajo sobre el sistema.*

*Trata de comprimirlo si es interno ó trata de expandirlo hacia el ambiente si es un sistema abierto. La cantidad de trabajo que comúnmente se llama flujo de trabajo ó presión-volumen de trabajo es equivalente a la tasa de presión de flujo volumétrico.*

*Para hacer un balance de energía, dependiendo de la situación en particular, se debe considerar el calor ( $Q$ ), el trabajo mecánico ( $W_s$ ) ó las pérdidas por fricción.*

*El trabajo mecánico es efectuado por bombas ó algún otro equipo mecánico. Cuando un fluido se mueve siempre existen fuerzas de fricción tratando de detenerlo, éste depende de longitud y diámetro de la cañería, rugosidad de ésta, codos, válvulas, flujos, diferencias de elevación, variaciones de temperatura y la presencia de equipos mecánicos.*

# *Balance de Energía en un flujo de fluidos turbulento por una cañería*

*Consideremos un fluido incompresible sin intercambio de calor con el ambiente.*

*Para llevar a cabo el balance de energía para tal flujo se debe considerar :*

- a) Cambio de la energía cinética del fluido*
- b) Cambio de la energía potencial debido al cambio de elevación*
- c) Pérdidas por fricción debido a varios segmentos del sistema*
- d) Trabajo hecho sobre el fluido por equipos mecánicos*
- e) Cambios de presión en la entrada y salida del sistema*

*La tasa de energía cinética que entra a una sección de la cañería, asumiendo que la velocidad es la velocidad promedio en cualquier parte está dada por:*

$$E_c = \frac{1}{2} m u_{prom}^2$$

# *Balance de Energía en un flujo de fluidos turbulento por una cañería*

*Cuando un fluido de una masa  $m$  (kg/s) entra a una sección de una cañería en una localización 1 a una velocidad  $u_{1,prom}$ , experimenta pérdidas por fricción ( $\Sigma E_f$ ), cambios en su elevación de  $z_1$  a  $z_2$  y lo deja en una posición 2 a una velocidad  $u_{2,prom}$ , el trabajo requerido esta dado por:*

$$W_s = Q(P_2 - P_1) + \frac{1}{2}m(u_{2,prom}^2 - u_{1,prom}^2) - gm(z_2 - z_1) + m\Sigma E_f$$

*Donde,  $Q$  es el flujo volumétrico ( $m/\rho$ );  $p_2-p_1$  es la diferencia de presión del fluido en las dos posiciones;  $z_2-z_1$  es la diferencia de elevación;  $W_s$  es la potencia agregada al fluido (Watts, hp, Btu/h) y  $m$  es la masa de flujo (kg/s, lb/min) del fluido.*

# Balance de Energía Mecánica

$$\frac{W_s}{m} = \frac{P_2 - P_1}{\rho} + \frac{1}{2} (u_{2,prom}^2 - u_{1,prom}^2) + g(z_2 - z_1) + \sum \frac{4fLu^2}{2D}$$

*Sin energía mecánica ( $W_s = 0$ ) y fricción despreciable ( $E_f = 0$ ), esta ecuación se denomina: ECUACIÓN DE BERNOULLI*

$$\frac{P_2 - P_1}{\rho} + \frac{1}{2} (u_{2,prom}^2 - u_{1,prom}^2) + g(z_2 - z_1) = 0$$

## Ejemplo 3

Calcular la potencia requerida para bombear 6 kg/s de agua a través de una cañería lisa de 0,1 m de diámetro desde un estanque a otro localizado a 150 m sobre el primero. Ignorar las pérdidas por fricción. La densidad del agua se puede asumir igual a 1000 kg/m<sup>3</sup>.

Solución: en este caso el agua en el estanque inicial tiene una velocidad cero (energía cinética cero) y es bombeada hacia arriba 150 m en contra de la gravedad. Además el agua deja la cañería a una cierta velocidad y entonces tiene algo de energía cinética. La velocidad promedio del agua en la cañería es de  $u = 0,76$  m/s. Insertando este dato en la ecuación de Bernoulli se obtiene:

$$\frac{W_s}{m} = \frac{1}{2}(u_2^2 - 0^2) + h^* g$$

$$W_s = \frac{1}{2}mu^2 + 150mg = 150.3 mg = 8,8 \text{ kW} = 12 \text{ hp}$$

# Ejemplo 4

Agua a 20 °C fluye a través de 100 ft de longitud por una cañería de hierro de 4 pulg de diámetro interno. La velocidad promedio del agua es de 6 ft/s y el punto de salida es 3 ft más alto que el punto de entrada. a) ¿cuál es la caída de presión a través de la cañería, y b) ¿cuál es la potencia requerida para mover el agua?

## Solución:

- El agua fluye a través de una línea recta sin obstáculos ó bombas.
- No hay energía mecánica dentro de la sección que se está investigando ( $W_s=0$ ).
- Las pérdidas de fricción son sólo debido al flujo de agua en la sección recta.
- No hay energía cinética, diámetro constante con entrada y salida del agua idéntica.

$$\frac{W_s}{m} = \frac{P_2 - P_1}{\rho} + \frac{1}{2}(u_{2,prom}^2 - u_{1,prom}^2) + g(z_2 - z_1) + \sum \frac{4fLu^2}{2D}$$

$$\Delta P_f = \frac{4fL}{D} \times \frac{1}{2} \rho u^2$$

$$\frac{P_2 - P_1}{\rho} + g(z_2 - z_1) + 4f \frac{Lu^2}{2D}$$

# Ejemplo 4 - Cálculos

<b>Parámetro</b>	<b>Valor</b>	<b>British</b>	<b>Valor</b>	<b>Métrico</b>
<i>Diámetro interior (D)</i>	4	<i>Pulg</i>	0,1016	<i>m</i>
<i>Longitud cañería (L)</i>	100	<i>feet</i>	30,48	<i>m</i>
<i>Velocidad promedio (<math>u^2</math>)</i>	6	<i>ft/s</i>	1,83	<i>m/s</i>
<i>Flujo volumétrico</i>	0,523	<i>ft<sup>3</sup>/s</i>	0,0148	<i>m<sup>3</sup>/s</i>
<i>Rugosidad (<math>\varepsilon</math>)</i>	0,0018	<i>Pulg</i>	0,046	<i>mm</i>
<i>Rugosidad relativa (<math>\varepsilon/D</math>)</i>	$4,5 \cdot 10^{-4}$		$4,5 \cdot 10^{-4}$	
<i>Densidad (<math>\rho</math>)</i>	62,3	<i>lb/ft<sup>3</sup></i>	998	<i>kg/m<sup>3</sup></i>
<i>Viscosidad (<math>\mu</math>)</i>	0,00067	<i>lb/ft*s</i>	0,001	<i>Pa*s</i>
<i>Número Reynolds (Re)</i>	185.000		185.000	
<i>Factor fricción (f)</i>	0,0042		0,0042	
<i>Flujo másico (m)</i>	32,6	<i>lb/s</i>	14,79	<i>kg/s</i>
<i>Elevación (<math>z_2 - z_1</math>)</i>	3	<i>feet</i>	0,9144	<i>m</i>
<i>Energía potencial <math>g(z_2 - z_1)</math></i>	96,4	<i>ft<sup>2</sup>/s<sup>2</sup></i>	8,96	<i>m<sup>2</sup>/s<sup>2</sup></i>
<i>Pérdidas fricción (<math>\Sigma E_f</math>)</i>	90,7	<i>ft<sup>2</sup>/s<sup>2</sup></i>	8,43	<i>m<sup>2</sup>/s<sup>2</sup></i>
<i>Pérdidas presión (<math>\Delta P</math>)</i>	2,52	<i>psi</i>	17.400	<i>N/m<sup>2</sup></i>
<i>Requerimientos de potencia</i>	0,253 – 0,345	<i>Btu/s - hp</i>	257	<i>W</i>