FENOMENOS DE TRANSPORTE EN METALURGIA

TRANSFERENCIA DE MOMENTUM

Clase 06/07

Prof. Dr. Leandro Voisin A.

Flujo de una capa que cae

Considere el flujo de una capa laminar sobre una superficie vertical. Desprecie los efectos de entrada asociados con la introducción del fluido.

Solución:

De acuerdo al enunciado sólo debemos preocuparnos del componente-x de la ec. de movimiento. Al trabajar en coordenadas cartesianas, para flujo paralelo se tendrá que:

$$v_y = v_z = 0$$

Además para un fluido incomprensible la ecuación de continuidad se escribe como:

$$\nabla \cdot v = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$$

Luego sólo debemos analizar el componente-x de la ec. de Navier Stokes

Solución:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho \mathrm{v} = -(\nabla \cdot \rho \mathrm{v}\mathrm{v}) - \nabla P - (\nabla \cdot \tau) + \rho g$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho \mathrm{v}_x = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\rho \mathrm{v}_x \mathrm{v}_x + \frac{\partial}{\partial y}\rho \mathrm{v}_y \mathrm{v}_x + \frac{\partial}{\partial z}\rho \mathrm{v}_z \mathrm{v}_x\right) - \ldots$$

$$\ldots - \left(\frac{\partial}{\partial x}\tau_{xx} + \frac{\partial}{\partial y}\tau_{yx} + \frac{\partial}{\partial z}\tau_{zx}\right) - \frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x$$

Aplicando la ec. de viscosidad de Newton, encontramos la ecueción que describe el comportamiento del perfil de velocidad

$$\rho \frac{D\mathrm{v}}{Dt} = -\nabla P + \mu \nabla^2 \mathrm{v} + \rho \mathrm{g}$$

Solución:

$$\tau_{xx} = -2\mu\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot v)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = -\mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right)$$

Reemplazando:

$$\rho\left[\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[2\mu\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu\nabla \cdot v\right] + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\right] - \frac{\partial P}{\partial x} + \rho F_x$$

$$\rho\left[\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial t}+\mathrm{v}_x\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x}+\mathrm{v}_y\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial y}+\mathrm{v}_z\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial z}\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left[2\mu\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial x}-\frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\mathrm{v}\right]+\ldots$$

$$\ldots+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{v}_y}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial z}+\frac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial x}\right)\right]-\frac{\partial P}{\partial x}+\rho F_x$$

Simplificaciones:

El lado izquierdo de la ec. es 0 porque:

i) Se supuso estado estacionario, de manera que la derivada temporal es nula.

ii) $\partial \mathrm{v}_x/\partial x = 0$ *debido a la continuidad.*

iii) $\mathrm{v}_y, \mathrm{v}_z = 0$

Notando que la viscosidad es constante y que la única fuerza de cuerpo es la debida a la gravedad, la ec. se simplifica a:

$$\rho g_x = -\mu \frac{\partial^2 \mathrm{v}_x}{\partial y^2}, \qquad 0 \le y \le h$$

Incorporando las condiciones de borde:

$$\mathrm{v}_x = 0, \qquad y = 0$$

Condición de no deslizamiento ó adherencia, interfase líquido-sólida.

$$\frac{\partial \mathrm{v}_x}{\partial y} = 0, \qquad y = h$$

Condición de interfase líquido-gas.

Resolviendo:

$$\mathrm{v}_x = \left(\rho g_x / 2\mu\right)\left[2hy - y^2\right]$$

Otras propiedades pueden ser calculadas:

i) Velocidad máxima, en y = h: $v_{x,max} = \left(\rho g_x / 2\mu\right) h^2$

ii) Velocidad promedio, $\overline{v_x}$: $\overline{v_x} = \frac{1}{h}\int_0^h v_x(y)\,dy = \frac{\rho g_x h^2}{3\mu}$

iii) Rapidez de flujo másico por unidad de ancho W´:

$$W' = \int_0^h \rho v_x(y)\,dy = h\rho v_{x,\max} = \frac{\rho^2 g_x h^3}{3\mu}$$

La validez de las ecs. (i), (ii) y (iii), se encuentra restringida al flujo laminar, es decir a condiciones de:

$$N_{\mathrm{Re,f}} < 20$$

El número de Reynolds considerado es aquel de capa delgada o film en movimiento:

$$N_{\mathrm{Re,f}} = \frac{4h\mathrm{v}_{x,max}\rho}{\mu}$$

Se estableció que para el rango mayor o igual a 20 y menor o igual a 2000 se mantiene flujo laminar aunque con ondas en la superficie externa.

Estime el espesor máximo permisible de la capa límite de metales que caen verticalmente para que satisfaga el criterio de flujo laminar.

a)Acero fundido, μ= 6.5 x 10^{-3} kg/ms, ρ= 7,1 x 10^{3} kg/m^{3} .

b)Vidrio fundido, μ= 10 kg/ms, ρ= 3 x 10^{3} kg/m^{3} .

$$20 \approx \frac{4h\mathrm{v}_{x,\max}\rho}{\mu} \qquad \mathrm{N}_{\mathrm{Re,f}} < 20$$

Y sustituyendo $\overline{\mathrm{v}_{\mathrm{x}}}$

$$\overline{\mathrm{v}_{\mathrm{x}}} = \frac{1}{h}\int_0^h \mathrm{v}_x(y)dy$$

$$\Rightarrow \quad h = \left(15\mu^2/\rho^2 g\right)^{1/3}$$

$$h = \left(15\mu^2/\rho^2 g\right)^{1/3}$$

Luego para una capa de acero:

$$h = \left(\frac{15 \cdot 4.23 \cdot 10^{-5}}{5.04 \cdot 10^{7} \cdot 9.81}\right)^{1/3} \approx 1.08 \cdot 10^{-4}\, m = 0.108 mm$$

y para una capa de vidrio:

$$h = \left(\frac{15 \cdot 100}{9 \cdot 10^{6} \cdot 9.81}\right)^{1/3} \approx 2.56 \cdot 10^{-2}\, m = 25.6 mm$$

Flujo raptante alrededor de una esfera sólida

Considere el flujo de un fluido incomprensible alrededor de una esfera sólida, el fluido se aproxima a la esfera desde la parte inferior siguiendo el eje-z con velocidad uniforme v_{∞}.

Solución:

De acuerdo al enunciado la componente-ϕ en la ec. de momentum será 0. Adicionalmente si el flujo es lento, los términos de aceleración de la ec. de Navier Stokes pueden ser ignorados. :

$$\text{r-component} \quad \rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r}\right)$$

$$= -\frac{\partial P}{\partial r} + \mu\left(\nabla^2 v_r - \frac{2}{r^2}v_r - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2}v_\theta\cot\theta - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}\right) + \rho g_r \tag{D}$$

$$\theta\text{-component} \quad \rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\phi^2\cot\theta}{r}\right)$$

$$= -\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta} + \mu\left(\nabla^2 v_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2\sin^2\theta} - \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}\right) + \rho g_\theta \tag{E}$$