



FENOMENOS DE TRANSPORTE EN METALURGIA

TRANSFERENCIA DE MOMENTUM

Clase 07/07

Prof. Dr. Leandro Voisin A.



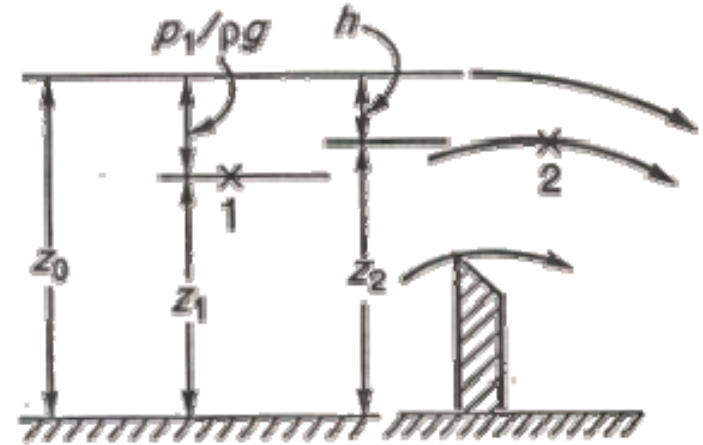
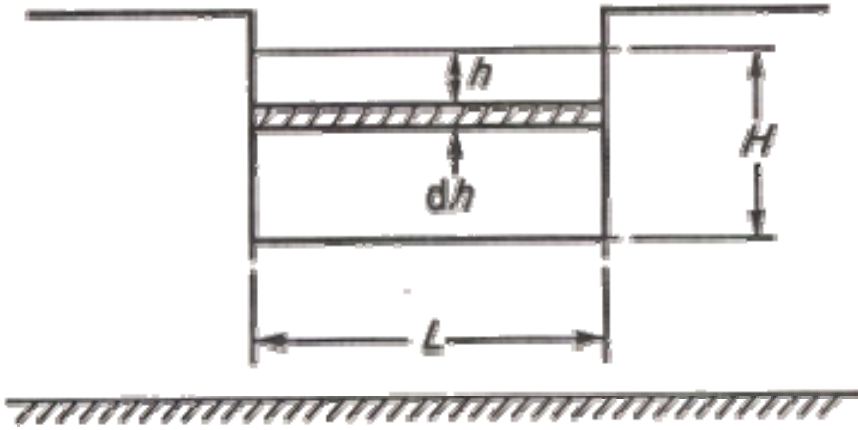
Otras implicancias de la ec. de Ecuación de Bernoulli Aberturas y vertederos

Una abertura es un orificio cuya superficie de agua se ubica por debajo del borde superior físico del sistema y presentan forma rectangular ó triangular.

Un vertedero es una pared transversal a la corriente sobre la cual fluye agua, es de borde agudo ó suave.



Otras implicancias de la ec. de Ecuación de Bernoulli Aberturas y vertederos



Al aplicar Bernoulli a los puntos 1 y 2 se tiene que:

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2$$

$$v_1 = p_2 = 0 \quad \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = z_0 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{v_2^2}{2g} \quad v_2 = \sqrt{2gh}$$



Otras implicancias de la ec. de Ecuación de Bernoulli Aberturas y vertederos

La descarga dQ a través de una longitud L y espesor dh , esta dada por:

$$dQ = Ldh \sqrt{2gh}$$

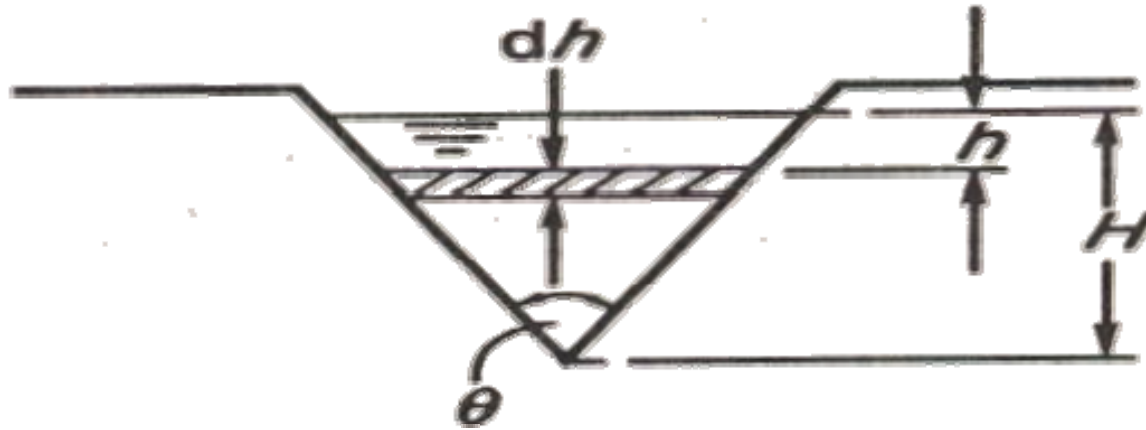
La descarga total sobre la abertura :

$$Q = \int_0^H L \sqrt{2gh} dh = \frac{2}{3} L \sqrt{2g} H^{3/2}$$

Al considerar la contracción de la vena (plano vertical) y la fricción interna por la viscosidad:

$$Q = \frac{2}{3} C_D L \sqrt{2g} H^{3/2} \quad \text{Ecuación 1}$$

Otras implicancias de la ec. de Ecuación de Bernoulli Aberturas y vertederos



Se considera la descarga a través de una tira angosta de espesor dh y profundidad h . El ancho es:

$$2 (H - h) \tan \frac{\theta}{2}$$

$$v = \sqrt{2gh}$$

Al aplicar Bernoulli

$$dQ = 2(H - h) \tan \frac{\theta}{2} \sqrt{2gh} dh$$

Otras implicancias de la ec. de Ecuación de Bernoulli Aberturas y vertederos

La descarga total a través de la abertura es:

$$Q = \int_0^H 2 \tan \frac{\theta}{2} \sqrt{2g} (H - h) h^{1/2} dh$$

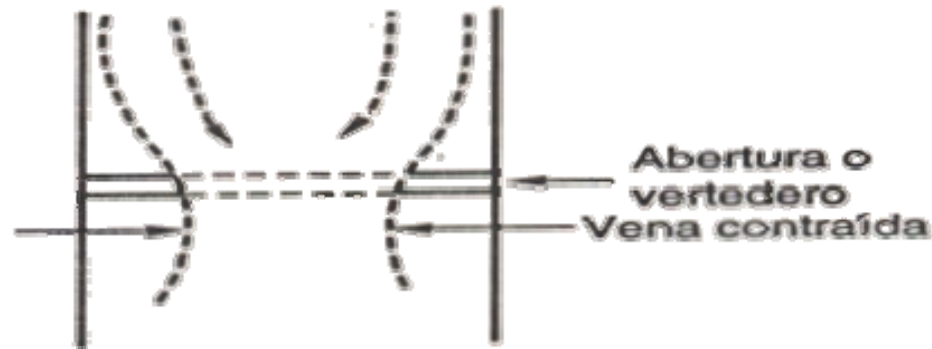
$$Q = 2 \tan \frac{\theta}{2} \sqrt{2g} \cdot \left[\frac{2}{3} H h^{3/2} - \frac{2}{5} h^{5/2} \right]_0^H = \frac{8}{15} \tan \frac{\theta}{2} \sqrt{2g} H^{5/2}$$

Al considerar la contracción de la vena y la degradación de energía:

$$Q = \frac{8}{15} C_D \tan \frac{\theta}{2} \sqrt{2g} H^{5/2} \quad \text{Ecuación 2}$$

Otras implicancias de la ec. de Ecuación de Bernoulli Aberturas y vertederos

Efecto de las contracciones en los extremos del vertedero rectangular. En canales más anchos que la abertura la vena se contraerá.



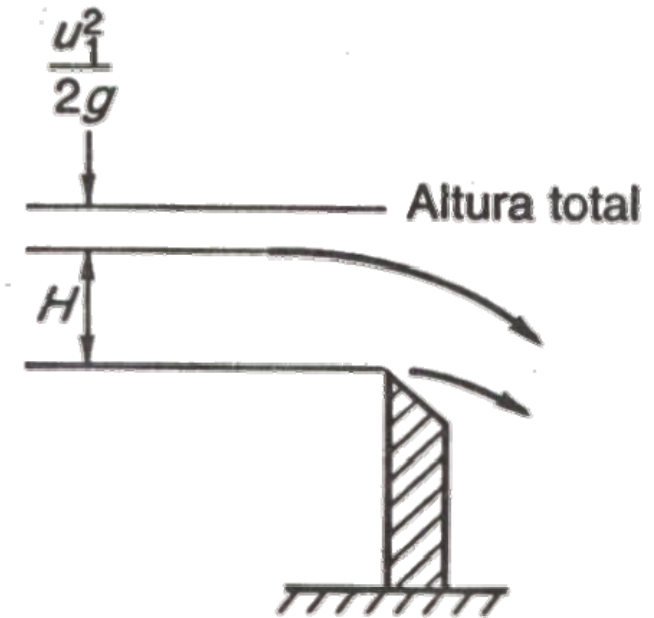
Francis encontró experimentalmente que la contracción era proporcional a la altura.

$$C_D = 1.84 \left(1 - 0,1n \frac{H}{L} \right) LH^{3/2} \quad \text{Ecuación 3}$$

Donde n es el número de contracciones. En éste caso $C_D = 0.623$. En esta formula la constante 1.84 en unidades SI tiene dimensiones $m^{1/2}/s$.

Otras implicancias de la ec. de Ecuación de Bernoulli Aberturas y vertederos

El fluido en el canal de llegada posee energía cinética hasta ahora insignificante, por ello, la altura estática medida en el canal de llegada es menor que la altura por $v_1^2 / 2g$.



$$\begin{aligned}
 Q &= \int_{v_1^2 / 2g}^{H + v_1^2 / 2g} L \sqrt{2gh} \, dh \\
 &= \frac{2}{3} L \sqrt{2g} \left[\left(H + \frac{v_1^2}{2g} \right)^{3/2} - \left(\frac{v_1^2}{2g} \right)^{3/2} \right]
 \end{aligned}$$

Tomando en cuenta la fricción y la contracción en la vena, y sin considerar $v_1^2 / 2g$



Otras implicancias de la ec. de Ecuación de Bernoulli Aberturas y vertederos



$$Q = \frac{2}{3} C_D L \sqrt{2g} \cdot \left(H + \frac{v_1^2}{2g} \right)^{3/2}$$

Método aproximado para el cálculo de la descarga:

- i) Suponga H altura total del vertedero y calcule C_D a partir de la formula de Francis (3) ó de la ecuación (1)*
- ii) Conociendo el área de sección transversal del canal, A , calcule:*

$$v_1 = (Q / A) \quad \text{y} \quad v_1^2 / 2g$$

- iii) Obtenga $(H + v_1^2 / 2g)$ y utilice este dato para obtener una segunda aproximación de Q . Normalmente la exactitud de éste valor es aceptable, pero puede ser necesario repetirlo.*

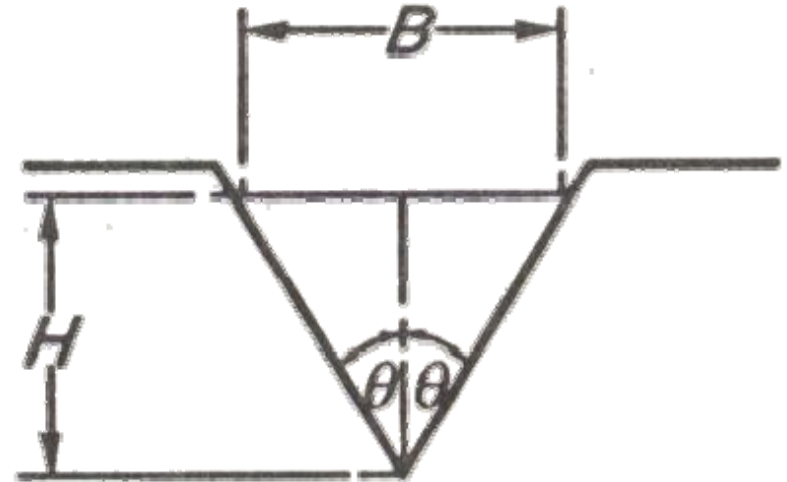


Otras implicancias de la ec. de Ecuación de Bernoulli Aberturas y vertederos



Ejemplo

$$Q = \frac{8}{15} C_D \tan \theta \sqrt{2g} H^{5/2}$$



Se conduce agua por un canal de 1,5 m de ancho con un caudal que varía de 0.006 m³/s a 0.7 m³/s. si la altura máxima permitida es 125 mm, calcular la profundidad y el ancho de la parte superior de la abertura para el flujo máximo si el coeficiente de descarga es de 0.59. Por otro lado, si el ápice de la abertura se encuentra 1 m arriba del fondo del canal ¿Cuál será el efecto de tomar en cuenta la velocidad de aproximación en el canal en condiciones de flujo máximo?

Otras implicancias de la ec. de Ecuación de Bernoulli Aberturas y vertederos

Solución:

$$Q = \frac{8}{15} C_D \tan \theta \sqrt{2g} H^{5/2}$$

$$\theta = \arctan \frac{15Q}{8\sqrt{2g} H^{5/2} C_D}$$

$$\theta = \arctan \frac{15 \cdot 0.006 \frac{m^3}{s}}{8\sqrt{2 \cdot 9 \cdot 81} \frac{m^{1/2}}{s} \cdot 0.125^{5/2} m^{5/2} \cdot 0.59}$$

$$\theta = \arctan 0.779 (37.9^\circ)$$

Otras implicancias de la ec. de Ecuación de Bernoulli Aberturas y vertederos

Solución:

$$\text{Para } Q = 0.7 \text{ m}^3 / \text{s}$$

$$H^{5/2} = \frac{15Q}{8\sqrt{2g} \tan \theta C_D}$$

$$H^{5/2} = \frac{15 \cdot 0.7 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}}{8\sqrt{2 \cdot 9.81} \frac{\text{m}^{1/2}}{\text{s}} \cdot 0.779 \cdot 0.59} = 0.6447^{5/2}$$

$$H = 0.6447^{2/5} = 0.839 \text{ m}$$

$$B = 2H \tan \theta = 2 \cdot 0.839 \cdot 0.779 \text{ m} = 1.307 \text{ m}$$



Otras implicancias de la ec. de Ecuación de Bernoulli Aberturas y vertederos



Solución:

$$V_{\text{aprox}} = \frac{Q}{A} = \frac{0.7 \text{ m}^3/\text{s}}{1.5 \text{ m} \cdot 1.84 \text{ m}} = 0.253 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\frac{V_{\text{aprox}}^2}{2g} = \frac{0.253^2}{2 \cdot 9.81} \text{ m} = 0.00328 \text{ m}$$

$$Q = \frac{2}{3} B \sqrt{2g} \left[\left(H + \frac{V_a^2}{2g} \right)^{3/2} - \left(\frac{V_a^2}{2g} \right)^{3/2} \right]$$

$$V_a = V_1$$

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{v_a^2/2g}{H + v_a^2/2g} \right) = 2.5 \cdot \left(\frac{0.00328}{0.84 + 0.00328} \right) \cdot 100 = 97\%$$



Ejemplo

A partir de la componente-x de la ec. general de momentum, desarrollar la respectiva componente de la ec. de Navier Stokes (ρ y μ constantes).

Solución

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho v_x = - \left(\frac{\partial}{\partial x} \rho v_x v_x + \frac{\partial}{\partial y} \rho v_y v_x + \frac{\partial}{\partial z} \rho v_z v_x \right) - \dots$$

$$\dots - \left(\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yx} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zx} \right) - \frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x$$

Haciendo la expansión matemática de los terminos convectivos:



Solución

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) v_x = \rho v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_x \frac{\partial}{\partial x} \rho v_x$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (\rho v_x) v_y = \rho v_x \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_y \frac{\partial}{\partial y} \rho v_x$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (\rho v_x) v_z = \rho v_x \frac{\partial v_z}{\partial z} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \rho v_x$$

Introduciendo los términos en la ec. general de momentum y considerando ρ constante, tendremos:

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\rho \left[\underbrace{v_x \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)}_{= 0 \text{ por continuidad}} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right] - \left[\dots \right]$$



Luego incorporando los terminos viscosos (esfuerzos de corte):

$$\tau_{xx} = -2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \mathbf{v})$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = -\mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)$$

y considerando que:

$$\tau_{xx} = -\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \right)$$



Luego incorporando los terminos viscosos (esfuerzos de corte):

$$\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xx} = -\mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \tau_{yx} = -\mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \tau_{zx} = -\mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} - \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yx} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zx} = -\mu \left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right] - \mu \frac{\partial}{\partial x} \underbrace{\left[\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right]}_{= 0 \text{ por continuidad}}$$

$$\rho \left[\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right] = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right] + \rho g_x$$



Ejemplo

Un fluido fluye ascendentemente a través de una cañería cilíndrica doble concéntrica de largo L . Asuma que el fluido presenta un perfil de flujo completamente desarrollado. Los radios internos y externos son κR y R respectivamente.

- Escriba la ec. de momentum en terminos de la velocidad.
- Resuelva el perfil de velocidad.
- Determine la velocidad máxima.

Solución a)

Para un flujo completamente desarrollado, $v_z = f(r)$

$$\begin{aligned}
 \text{z-component} \quad \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial z} \\
 &+ \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z \quad (F)
 \end{aligned}$$



Solución a)

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right] + \rho g_z, \quad g_z = g$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = \frac{r}{\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g \right)$$

Solución b)

$$r \frac{\partial v_z}{\partial r} = \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g \right) \frac{r^2}{2\mu} + C_1$$

$$\Rightarrow v_z = \frac{1}{4\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g \right) r^2 + C_1 \ln r + C_2$$

$$C.B. 1: v_z = 0 \text{ en } r = \kappa R$$

$$C.B. 2: v_z = 0 \text{ en } r = R$$



Solución b)

$$\therefore C_1 = \frac{1}{4\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g \right) \frac{(1 - \kappa^2) R^2}{\ln \kappa}$$

$$C_2 = -\frac{1}{4\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g \right) R^2 \left[1 + (1 - \kappa^2) \frac{\ln R}{\ln \kappa} \right]$$

$$\Rightarrow v_z = \frac{1}{4\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g \right) \left[r^2 - R^2 \left[1 - (1 - \kappa^2) \frac{\ln \frac{r}{R}}{\ln \kappa} \right] \right]$$

Solución c)

$$\Rightarrow v_z = v_z^{\max}, \text{ cuando } \frac{\partial v_z}{\partial r} = 0$$



Solución c)

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} = 0 = \frac{r}{2\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g \right) + \frac{1}{4r\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g \right) \frac{(1 - \kappa^2)R}{\ln \kappa}$$

$$\frac{r}{2\mu} = \left(\frac{1}{4r\mu} \right) \frac{(\kappa^2 - 1)R^2}{\ln \kappa}$$

$$r^2 = \left(\frac{\kappa^2 - 1}{2 \ln \kappa} \right) \cdot R^2$$

$$\therefore v_z = v_z^{\max}$$

cuando $r = \sqrt{\frac{(\kappa^2 - 1)}{2 \ln \kappa}} \cdot R$