Resolución parte (d), pregunta 1, auxiliar n° 11

Como recordarán, en la parte (b) del problema 1 se determinó que el bloque se despega del platillo en el punto l_0 (con el suelo como punto de origen). Además, se determinó que el nuevo equilibrio ocurre en $\bar{l} < l_0$. Esto significa que la aceleración producida por el resorte cambia de sentido en ese punto, por lo que para puntos mayores a $\bar{l}$ el resorte produce una desaceleración en el platillo.

La duda que surgió era que si el platillo comenzaba a desacelerar en $\bar{l}$, entonces la separación entre el platillo y el bloque debía ocurrir en ese punto. En realidad, esto no es así, pues el bloque no sigue con velocidad constante desde que cruza el punto de equilibrio, sino que lleva una desaceleración equivalente a g (aceleración de gravedad). Luego, como la desaceleración producida por el resorte va creciendo cada vez más (debido a que crece la fuerza elástica) y la desaceleración del bloque se mantiene constante, la normal entre el bloque y el platillo va disminuyendo hasta alcanzar el valor cero en el punto l_0, como se había calculado previamente.

Aclarado esto, los cálculos que hicimos en la auxiliar están correctos. Sólo faltó la parte (d) que habíamos dejado pendiente y que explico a continuación.

En la parte (d) piden calcular la altura máxima del bloque cuando éste no se separa del platillo, y cuando sí lo hace. En ambos casos, el resorte se comprime hasta que el bloque ocupa la posición l. El procedimiento para calcular estas alturas será igualar la energía en el punto inicial (cuando está comprimido) y en el punto final (máxima altura). Para ambos casos, la energía inicial corresponde a la suma de la energía potencial elástica del resorte y las energías potenciales gravitatorias del bloque y el platillo. No existe energía cinética, pues el platillo y el bloque están quietos. Luego,

$$E_i = \frac{1}{2}k(l_0 - l)^2 + (M + m)gl$$

Para el caso en que el bloque no se separa, definiremos h como la altura máxima que éste alcanza. En este punto, existe energía potencial del resorte y potencial gravitatoria del bloque y el platillo. No existe energía cinética del platillo ni del bloque, pues nos interesa el punto de máxima altura, y por lo tanto la velocidad en ese punto tiene que ser cero (si la velocidad fuera distinta de cero, significa que el bloque va hacia el punto de máxima altura o está volviendo de éste, dependiendo si el resorte se está estirando o comprimiendo, respectivamente). Cabe destacar que $h < l_0$, pues de lo contrario el bloque se separaría del platillo, como se demostró en la parte (b). Luego,

$$E_f = (M + m)gh + \frac{1}{2}k(h - l_0)^2$$

Imponiendo $E_i = E_f$, se obtiene una cuadrática para h. Una solución está dada por $h = l$. Esta situación corresponde a decir que la altura máxima del bloque ocurre en l, es decir, cuando está comprimido. Esta solución aparece porque se satisface la condición $E_i = E_f$, pero no es de interés físico, pues es equivalente a no soltar nunca el resorte. Luego, la solución importante es la segunda, y está dada por:

$$h = 2l_0 - l - \frac{2(M + m)g}{k}$$

Para el caso en que el bloque se separa del platillo, definiremos H como la altura máxima. Cuando se suelta el resorte, todo el sistema se moverá unido hasta el punto l_0, donde el bloque se separará del platillo con una velocidad v. Para conocer esta velocidad, basta igualar E_i con la energía del sistema en l_0, definida como E_0. En este punto, tenemos la energía potencial gravitatoria y cinética del bloque y platillo. No hay energía potencial elástica del resorte, pues éste se encuentra en su largo natural. Luego,

$$E_0 = (M+m)gl_0 + \frac{1}{2}(M+m)v^2$$

Imponiendo $E_i = E_0$, se obtiene

$$v^2 = \frac{k(l_0 - l)^2}{M+m} - 2g(l_0 - l)$$

A partir de ahora, el bloque se mueve independiente del platillo. Por lo tanto, tomando la energía del bloque en este punto, e igualándola a la energía que tendrá en el punto de máxima altura, se obtienen H. La ecuación está dada por:

$$\frac{1}{2}Mv^2 + Mgl_0 = MgH$$

La expresión de la izquierda representa la energía del bloque en l_0, con su componente cinética y potencial gravitatoria, mientras que la de la derecha representa la energía en el punto de máxima altura, que sólo tiene componente potencial gravitatoria. De esta ecuación se deduce:

$$H = \frac{v^2}{2g} + l_0$$