Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: INVESTIGACIÓN OPERATIVA

GUÍA DE EXÁMENES ANTERIORES[1]

Patricio Hernández G.
shernand@ing.uchile.cl

[1]Esta guía es una recopilación de problemas de exámenes pasados. Las pautas son gentileza de los equipos docentes de la época. Cualquier error no forzado, favor denunciarlo a shernand@ing.uchile.cl

Problema 1

1. (1,5 ptos.) Explique analíticamente por qué las cajas de un banco trabajan con una fila única en vez de tener distintas filas para cada una. Para desarrollar su respuesta considere que los bancos funcionan con dos cajas solamente.

2. (1,5 ptos.) Al inicio de un tramo de una autopista llegan autos en instantes aleatorios de tiempo, los cuales después de recorrerlo en toda su extensión lo abandonan tomando otras vías.

   Hasta el momento se ha observado que en promedio una de las pistas pasa desocupada, y que el tiempo promedio que toman los vehículos en recorrer el tramo es razonable.

   En medio de una discusión por la segregación espacial que produce la autopista, una autoridad de la región en que se encuentra ésta ha sugerido la siguiente idea: "eliminar una pista del tramo para generar un bandejon central (área verde)". Según él, de esta manera se liberará la capacidad ociosa sin producir mayores efectos de congestión.

   ¿Ud. como experto en Investigación de Operaciones, estaría de acuerdo con el edil? Justifique su respuesta.

3. (1,5 ptos.) A una línea productiva llegan trabajos con una tasa λ [trabajos/hora]. Actualmente estos se amontonan en una pila siendo realizado primero el trabajo que está arriba del montón, es decir, según una regla de despacho LIFO.

   Preocupados por el tiempo promedio que permanecen los trabajos en el proceso, que incluye la espera y su paso por la línea, dos supervisores discuten sobre la calidad de la regla de despacho utilizada. Sergio dice que conseguirían menores tiempos promedio en el proceso utilizando una regla FIFO. En cambio, Andrés dice que una regla RANDOM, en la cual se escoge al azar el siguiente trabajo que entrará a la línea, es mejor que la otras dos considerando éste indicador.

   ¿Quién tiene la razón? Justifique su respuesta.

4. Considere un letrero luminoso que permanece encendido todo el día y que contiene N ampolletas. Cada ampolleta tiene un tiempo de funcionamiento, independiente de las otras, que se distribuye según una variable aleatoria exponencial de tasa μ_i. Con esta información responda las siguientes preguntas:

   - (0,5 ptos.) ¿Cómo se distribuye el tiempo que transcurre hasta que falla la primera ampolleta (puede ser cualquiera)?
   - (0,5 ptos.) ¿Con qué probabilidad la ampolleta número N será la primera en fallar?
   - (0,5 ptos.) Si tuviese que decidir sobre la forma de mantener funcionando el letrero, ¿cuál de las siguientes alternativas escogería?: (1) Reemplazar las N ampolletas para asegurar un tiempo de funcionamiento mayor, o (2) sólo reemplazar las ampolletas apagadas al momento de la revisión. Justifique su respuesta.

Solución Problema 1

1. Hay que comparar los resultado teóricos de la atención mediante 2 sistemas M/M/1 con tasa de llegada $\frac{\lambda}{2}$ vs un sistema M/M/2 con tasa llegada λ. Gana la M/M/2, claro que no tiene sentido comparar el largo de las colas, sino que el tiempo medio en el sistema. Notamos que en esta pregunta comparamos aspectos "analíticos" de los sistemas de atención y no como distintas disciplinas de atención puedan afectar psicológicamente la percepción del cliente respecto al tiempo de espera o calidad de la atención.

2. Realizando supuestos grotescos podemos suponer que el tramo puede ser modelado como 3 colas M/M/1 que se distribuyen a los autos. El que una pista en particular parezca vacía simplemente representa las preferencias de los conductores al momento de elegir la pista a seguir. Ahora si conservo el flujo de

llegada y quito una de las colas, facilmente puede ocurrir que la tasa de llegada de conductores supere la tasa de "atención efectiva" (es decir $\lambda > 2 \cdot \mu$). Podemos pensar que antes el sistema se encontraba bien dimensionado (es decir $\lambda < 3 \cdot \mu$), y que la diferencia entre las cargas que enfrentaban las distintas pistas se debián simplemente a que las preferencias de los conductores no los incentivaban a cambiar de pista a menos que las dos pistas usadas colapsaran.

3. Cualquiera de estas políticas de atención da lo mismo. Esto se debe a que el criterio de comparación es el tiempo medio en el sistema.

4. Respecto a las ampolletas:

   - Se distribuye exponencial de parámetro $\sum_{i=0}^{N} \mu_i$
   - Esta probabilidad es la siguiente:

$$P = \frac{\mu_N}{\sum_{i=0}^{N} \mu_i}$$

   - La alternativa (1) no tiene sentido (por la pérdida de memoria de la distribución exponencial), por lo que escogería la (2).

Problema 2

Tras una secuela de fracasos financieros, Armijo Catalán ha decidido dedicarse a la venta de un revolucionario producto de higiene personal. Ocupando sus precarios conocimientos ha realizado un estudio de su demanda, el que ha permitido concluir que para un período de venta k, cualquiera, el número de potenciales compradores se distribuye Poisson con una tasa igual al número de clientes que compró el producto en el período anterior $k-1$. Además en un período k cualquiera, la probabilidad que uno los clientes potenciales, independiende de todo lo demás, compre el producto es e^{-p_k} donde p_k es el precio fijado en el período k. Suponga que Armijo cuenta con una cantidad ilimitada de unidades del producto y que inicialmente (período 1) el número de clientes potenciales se distribuye Poisson con tasa λ[clientes].

1. (1,0 ptos.) Si en el período 2 se vendieron n unidades del producto, calcule la esperanza de los ingresos del período 1 (considere p_1 y p_2 conocidos).
2. (0,5 ptos.) Si en el período 2 se vendieron n unidades del producto, calcule la esperanza de los ingresos del período 3 (considere p_3 conocido).
3. (1,0 ptos.) ¿Cuál es el precio óptimo y el beneficio esperado máximo si se considera un sólo período de venta?
4. (1,5 ptos.) Responda lo anterior considerando 2 períodos de venta.
5. (2,0 ptos.) Ahora se desea resolver el problema para un horizonte de T períodos. Plantee un modelo de programación dinámica que lo ayude a encontrar el precio de venta óptimo al inicio de cada período.

Solución Problema 2

Sean N_i el número de unidades vendidas en el período de ventas i y U_i las utilidades del período i.

1. Si en el periodo 2 se vendieron n unidades del producto, calcule la esperanza de los ingresos del período 1 (considere p_1 y p_2 conocidos).

   Utilizando la formula de esperanza vemos que:

$$E[U_1|N_2 = n] = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P_1 \cdot P[N_1 = k|N_2 = n]$$

Ahora debemos calcular la distribucción condicional de las ventas del primer período. Usando Bayes y probabilidades totales:

$$\begin{aligned} P[N_1 = k|N_2 = n] &= \frac{P[N_2 = n|N_1 = k] \cdot P[N_1 = k]}{P[N_2 = n]} \\ &= \frac{P[N_2 = n|N_1 = k] \cdot P[N_1 = k]}{\sum_{i=0}^{\infty} P[N_2 = n|N_1 = i] \cdot P[N_1 = i]} \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} P[N_1 = k] &= \frac{(\lambda \cdot e^{-P_1})^k e^{-\lambda \cdot e^{-P_1}}}{k!} \\ P[N_2 = n|N_1 = k] &= \frac{(k \cdot e^{-P_2})^n e^{-k \cdot e^{-P_2}}}{n!} \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} P[N_1 = k|N_2 = n] &= \frac{\frac{(k \cdot e^{-P_2})^n e^{-k \cdot e^{-P_2}}}{n!} \cdot \frac{(\lambda \cdot e^{-P_1})^k e^{-\lambda \cdot e^{-P_1}}}{k!}}{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(i \cdot e^{-P_2})^n e^{-i \cdot e^{-P_2}}}{n!} \cdot \frac{(\lambda \cdot e^{-P_1})^i e^{-\lambda \cdot e^{-P_1}}}{i!}} \\ &= \frac{\frac{k^n \cdot \left[\lambda \cdot e^{-(p_1 + e^{-p_2})}\right]^k}{k!}}{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{i^n \cdot \left[\lambda \cdot e^{-(p_1 + e^{-p_2})}\right]^i}{i!}} \\ &= \frac{\frac{k^n \cdot \boxed{\lambda}^k}{k!}}{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{i^n \cdot \boxed{\lambda}^i}{i!}} \end{aligned}$$

Reemplazando obtenemos que:

$$E[U_1|N_2 = n] = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P_1 \cdot \frac{\frac{k^n \cdot \boxed{\lambda}^k}{k!}}{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{i^n \cdot \boxed{\lambda}^i}{i!}}$$

2. Esto es:

$$\begin{aligned} E[U_3|N_2 = n] &= \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot p_3 \cdot \frac{\left[n \cdot e^{-p_3}\right]^i \cdot e^{-\left[n \cdot e^{-p_3}\right]}}{i!} \\ &= \left[n \cdot e^{-p_3}\right] \cdot p_3 \end{aligned}$$

3. Cuando consideramos sólo un período de ventas la ganancias esperadas (en función del precio a cobrar) vienen dadas por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} E[U_1] &= \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot p_1 \cdot \frac{\left[\lambda \cdot e^{-p_1}\right]^i \cdot e^{-\left[\lambda \cdot e^{-p_1}\right]}}{i!} \\ &= \left[\lambda \cdot e^{-p_1}\right] \cdot p_1 \end{aligned}$$

Para calcular el precio óptimo derivamos e igualamos a 0.

$$\frac{d\left[\lambda \cdot e^{-p_1}\right] \cdot p_1}{dp_1} = 0 \Rightarrow p_1 = 1$$

Por lo tanto:

$$E[U_1] = \lambda \cdot e^{-1}$$

4. Cuando consideramos 2 períodos de venta la expresión de las utilidades en función de p_1 y p_2 es:

$$\begin{aligned} E[V_1 = U_1 + U_2] &= \sum_{i=0}^{\infty} \left[i \cdot p_1 + \sum_{j=0}^{\infty} j \cdot p_2 \cdot \frac{\left[i \cdot e^{-p_2}\right]^j \cdot e^{-\left[i \cdot e^{-p_2}\right]}}{j!} \right] \cdot \frac{\left[\lambda \cdot e^{-p_1}\right]^i \cdot e^{-\left[\lambda \cdot e^{-p_1}\right]}}{i!} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \left[i \cdot p_1 + i \cdot e^{-p_2} \cdot p_2\right] \cdot \frac{\left[\lambda \cdot e^{-p_1}\right]^i \cdot e^{-\left[\lambda \cdot e^{-p_1}\right]}}{i!} \\ &= \left[\lambda \cdot e^{-p_1}\right] \cdot \left[p_1 + e^{-p_2} \cdot p_2\right] \end{aligned}$$

Para encontrar los precios óptimos notamos que independiente de la tasa, el precio óptimo cuando queda un solo período de venta es $p^* = 1$ (parte anterior). Entonces la expresión anterior es equivalente a:

$$E[V_1] = \left[\lambda \cdot e^{-p_1}\right] \cdot \left[p_1 + e^{-1}\right]$$

Para calcular el precio p_1 óptimo derivamos e igualamos a 0.

$$\frac{d\left[\lambda \cdot e^{-p_1}\right] \cdot \left[p_1 + e^{-1}\right]}{dp_1} = 0 \Rightarrow p_1 = 1 - e^{-1}$$

Con esto la utilidad esperada en 2 períodos de venta es:

$$E[V_1] = \left[\lambda \cdot e^{-(1-e^{-1})}\right]$$

5. Primero notamos que la única información relevante en un período de venta dado es cuantos productos se vendieron en el período anterior.

- Estado
  E_k Número de productos vendidos el período $k-1$.

- Decisión
  p_k precio de venta del producto en el período k.

- V. Aleatoria
  N_k Número de compradores en el período k.

- Recursión
  $E_{k+1} = N_k$

- Condiciones de borde
  $V_{T+1}(E_{T+1}) = 0$
  $E_0 = \lambda$

- Función de Beneficios

$$V_k(E_k, p_k) = \sum_{i=0}^{\infty} \left[i \cdot p_k + V_{k+1}^*(i) \right] \cdot \frac{\left[E_k \cdot e^{-p_k}\right]^i \cdot e^{-\left[E_k \cdot e^{-p_k}\right]}}{i!}$$

con:

$$V_k^*(E_k) = \max_{p_k} \{V_k(E_k, p_k)\}$$

Problema 3

A un aeropuerto internacional llegan vuelos según un Proceso de Poisson de tasa λ [vuelos/hora]. La cantidad de pasajeros que trae cada vuelo puede ser descrita por una variable aleatoria que toma valores enteros entre m_{min} y m_{max} ($m_{min} < m_{max}$). Las variables aleatorias que representan las cantidades de pasajeros en vuelos distintos son independientes e idénticamente distribuidas. Suponga que V_k es la probabilidad de que un vuelo traiga k pasajeros.

Los pasajeros que llegan pueden ser "nacionales", retornando al país, o "extranjeros", que vienen de visita. Un pasajero cualquiera, independiente de todo lo demás, es "nacional" con probabilidad p y "extranjero" con probabilidad $(1-p)$.

1. (0,5 ptos.) Dado que en un vuelo vienen $i+j$ pasajeros, calcule la probabilidad de que i pasajeros sean nacionales y j sean extranjeros. Llame q_{ij} a esta probabilidad.

2. (0,5 ptos.) Calcule la probabilidad de que en un vuelo cualquiera haya exactamente i pasajeros nacionales y j extranjeros. Llame r_{ij} a esta probabilidad.

Una vez en el aeropuerto todos los pasajeros se dirigen directamente a la oficina de migraciones, donde esperan en dos filas separadas: una para pasajeros nacionales y otra para pasajeros extranjeros. Suponga que el tiempo de traslado desde el arrivo del avión hasta la oficina de migraciones es despreciable.

En la oficina de migraciones trabaja un solo empleado, el cual requiere de un tiempo exponencialmente distribuido de media $1/\mu$ [horas] para atender a un pasajero, independiente de su nacionalidad. Además considere que en caso de existir pasajeros esperando, el siguiente pasajero a ser atendido por el empleado es escogido de acuerdo a las siguientes reglas:

- Si la cantidad de pasajeros esperando en la fila de nacionales es **mayor o igual** a la cantidad de pasajeros esperando en la fila de extranjeros, el próximo pasajero en ser atendido será el primero en la fila de nacionales;
- Si la cantidad de pasajeros esperando en la fila de nacionales es **menor** a la cantidad de pasajeros esperando en la fila de extranjeros, el próximo pasajero en ser atendido será el primero en la fila de extranjeros.

Teniendo en cuenta lo anterior, responda las siguientes preguntas:

3. (2,5 ptos.) Modele el número de personas en las filas como una cadena de Markov en tiempo continuo. Especifique los estados posibles y las tasas de transición.
   Hint: Considere un estado genérico de la cadena y vea a cuáles estados puede haber transiciones.
4. (1,5 ptos.) Calcule la "tasa efectiva" de llegada de pasajeros al aeropuerto. A partir de este valor especifique las condiciones para que el sistema alcance el estado estacionario.
5. (1,0 ptos.) ¿Cómo se debería modificar el modelo si las tasas de atención dependiesen del tipo de pasajero que está siendo atendido? Específicamente, considere que los tiempos de atención puede ser descritos por variables aleatorias de distribución exponencial de media $1/\mu_N$ [horas], para los pasajeros nacionales, y de media $1/\mu_E$ [horas], para los extranjeros.
   Hint: Analice si es necesario incluir algún dato adicional en la definición de los estados y cuáles transiciones cambian.

Solución Problema 3

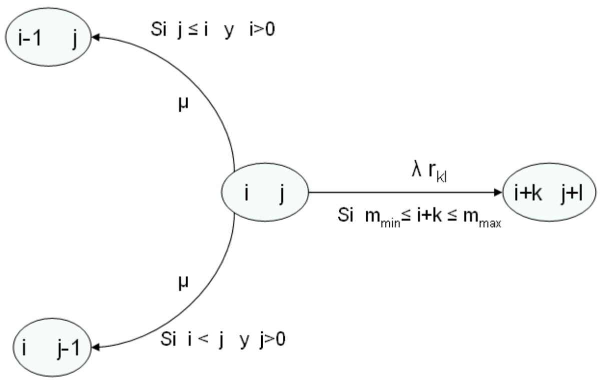
1. Esto es la probabilidad que una binomial de parámetros $i + j$ y p tome el valor i.

$$q_{ij} = \binom{i+j}{i} p^i \cdot (1-p)^j$$

2. Debemos multiplicar por la probabilidad que en el vuelo vengan exactamente $i + j$ personas. Esto es:

$$r_{ij} = \begin{cases} q_{ij} \cdot V_{i+j} & si \quad m_{min} \leq i + j \leq m_{max} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

3. Notamos que debemos modelar el número de personas en cada fila, y no el número de personas en el sistema. Consideremos un estado genérico y vemos cuales son las transiciones posibles y bajo que condiciones se realizan. Las transiciones posibles (y las condiciones de ocurrencia) se muestran en el siguiente dibujo.



4. El número de personas que llega al aeropuerto sigue un proceso de Poisson compuesto de tasa λ y esperanza del batch $E[N]$:

$$E[N] = \sum_{i=m_{min}}^{m_{max}} i \cdot V_i$$

Entonces, el número esperado de personas que llegan en una hora puede ser calculado condicionando sobre el número de aviones que llegan.

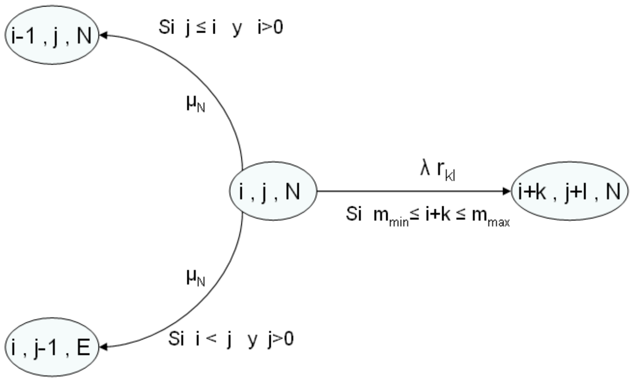
$$\begin{aligned} E[Pasajeros] &= \sum_{j=0}^{\infty} E[X_j] \cdot \frac{\lambda^j e^{-\lambda}}{j!} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} E[N] \cdot \frac{\lambda^j e^{-\lambda}}{j!} \\ &= E[N] \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j e^{-\lambda}}{j!} \\ &= E[N] \cdot \lambda \end{aligned}$$

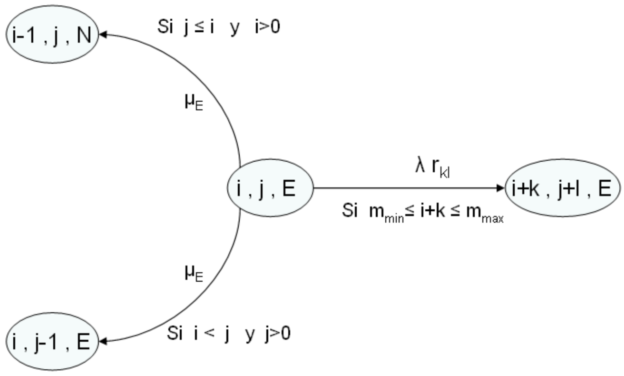
Donde hemos ocupado el hecho que el número de pasajeros que traen los distintos aviones son variables aleatorias iid.

La condición de estado estacionario sigue siendo, la tasa de entrada al sistema debe ser menor que la tasa de atención. Esto es:

$$\frac{\lambda \cdot E[N]}{\mu} < 1$$

5. En esta situación debemos incluir como información de estado que tipo de pasajero esta siendo atendido, nacional o extranjero. Procediendo como se hizo en la parte 2 la cadena de markov toma la siguiente forma (distinguimos a quien se atiende)





Problema 4

Considere que Ud. está diseñando una de las plazas de peaje de la nueva Autopista Central. Para esto se le ha pedido definir el número de cajas con las que debería contar el sistema en un día de demanda alta, de manera tal de asegurar que no más del 5 % de los autos espere más de dos minutos. Suponga que se mantiene fija la cantidad de cajas abiertas durante todo el día.

Si se quisiera abordar el problema planteado por medio de un modelo de simulación, responda las siguientes preguntas:

1. (1,0 ptos.) ¿Qué tipo de comportamiento simularía, transiente o estacionario? Son importantes las condiciones iniciales para este problema?
2. (1,0 ptos.) ¿Qué variables sería necesario definir para realizar una corrida de simulación? ¿Cómo calcularía el indicador relevante para este problema? ¿Cómo actualizaría las variables definidas ante los eventos aleatorios?
3. (1,5 ptos.) Construya un layout para el proceso descrito considerando todo lo definido en los puntos anteriores.
4. (1,5 ptos.) ¿Cómo estimaría las distribuciones que siguen las variables definidas? ¿Cómo generaría números aleatorios con las distribuciones encontradas?

5. (1,0 ptos.) ¿Conviene diseñar la plaza de peaje tomado como referencia un día de demanda alta? Justifique su respuesta.

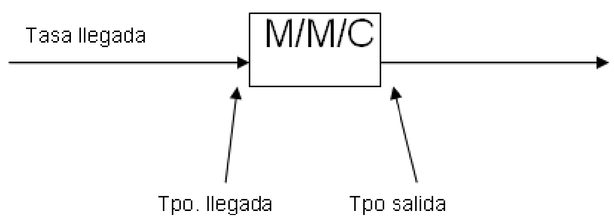
Solución Problema 4

1. Dado que el peaje una vez que entra en funcionamiento no deja de estar en ese estado nunca, es más cercano a la realidad simular el comportamiento estacionario del sistema. Por lo tanto, las condiciones iniciales del problema no son relevantes. Los únicos datos relevantes son las distribuciones de las llegadas de vehículos al peaje, además de los indicadores necesarios para realizar algún análisis del sistema (como el tiempo de espera en cola, por ejemplo).

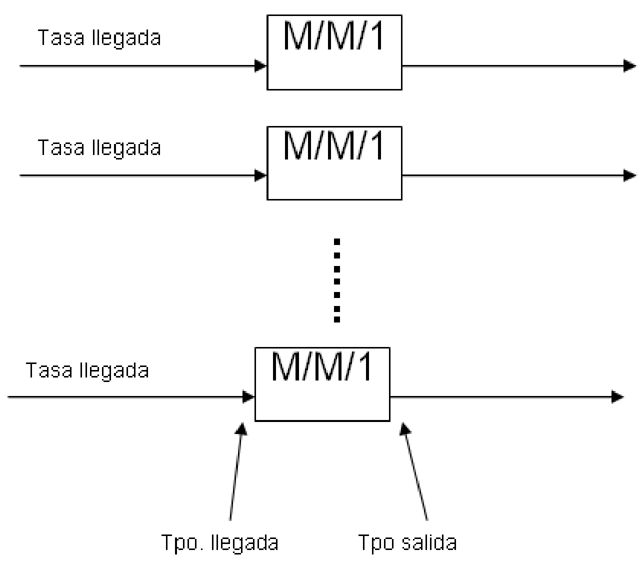
2.
   - Variables necesarias: Distribuciones de Entrada y Atención.
   - Indicadores: Tiempo de espera en cola, Entidades promedio en espera, entre otros
   - Después de cada llegada y atención, las variables deben ser actualizadas dependiendo de la definición de cada uno.

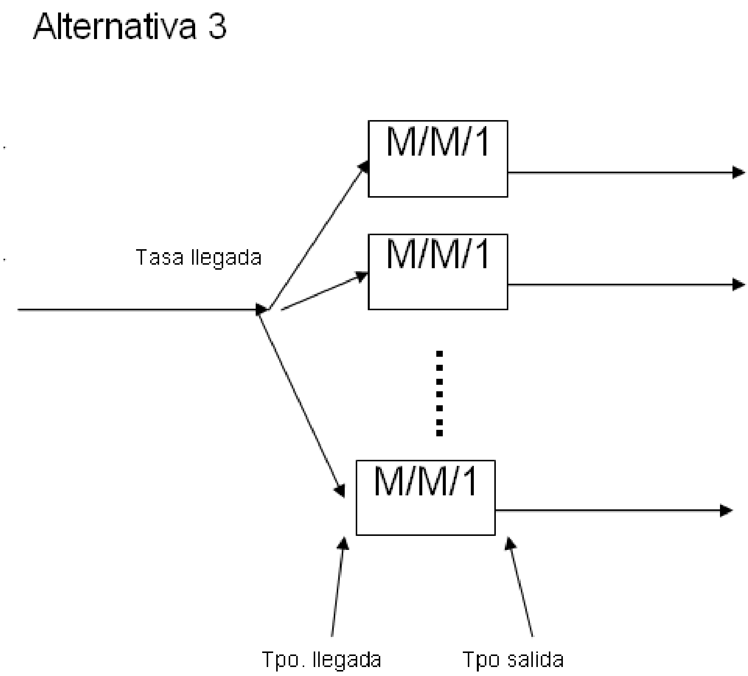
3. Layout: la idea es que utilicen las variables y parámetros antes definidos y justifiquen la elección de una alternativa de layout. A continuación se muestran distintas alternativas:

Alternativa 1



Alternativa 2





4. Para generar números aleatorios se puede utilizar el método de la transformada inversa. Esto es, dado un número aleatorio u entre 0 y 1, que dicho sea de paso puede ser generado utilizando alguna semilla y el método de los cuadrados centrales, y considerando que la distribución de la que nos interesa generar números tiene una función de distribución, o densidad acumulada, F(x), basta hacer $F^{-1}(u) = x$, luego x se distribuye según la función que interesa.

5. En general nunca conviene diseñar un sistema como éste, entre otros, considerando la demanda máxima. Esto porque el resto de los días, donde no se alcance la demanda máxima, habrá un gran número de cajas sin ser utilizadas y que de todas maneras significan un costo para la empresa que corresponda. Sin embargo, si los costos por mantener capacidad ociosa no son grandes, o pueden realizarse contrataciones de personal sólo para los períodos con demanda alta y considerando además como política de la empresa que el nivel de servicio debe mantener ciertos estándares incluso en los días de alta demanda, sí se puede considerar la demanda alta para realizar el diseño del sistema. La justificación es lo más importante.

Problema 5

A un terminal de autobuses llegan pasajeros de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa $\lambda \frac{\text{pasajeros}}{\text{minuto}}$. Estos pasajeros esperan que salga un bus en una fila ordenada por estricto orden de llegada. Los buses salen cada 15 minutos y pueden ser de 2 tipos: Los *rápidos* y los *lentos*. La probabilidad que el siguiente bus sea rápido es p_r, mientras que con probabilidad p_l será lento. Los buses rápido demoran un tiempo fijo de T_r minutos en llegar a su destino, mientras que los buses lentos demoran T_l, con $T_l < T_r$. La capacidad de ambos tipos de buses es K y si hay más de N personas esperando en el terminal no puede entrar nadie más ($N >> K$).

Cada vez que va a salir un bus *rápido* todos los que están esperando intentan subir a él, mientras que en el caso de un bus *lento* existirá una probabilidad d que una persona de la fila quiera irse en este bus, independiente de lo que hagan los demás y de cuanto tiempo lleven esperando.

1. (3,0 ptos) Modele el número de pasajeros que hay en el terminal justo antes de la salida de un bus

como una cadena de Markov en tiempo discreto, poniendo atención en los casos interesantes. Justifique la existencia de probabilidades estacionarias. Escriba explícitamente las probabilidades de transición para cualquier par de estados.

2. (1,0 ptos) Si cuando un pasajero llega al terminal hay menos de K personas, ¿Cuál es el tiempo esperado hasta llegar al destino?.

Suponga ahora que permitimos que los pasajeros piensen y *decidan* si quieren o no viajar en un bus lento.

3. (0,5 ptos) Explique el Trade-Off que enfrenta una persona al decidir si desea o no intentar subir a un bus lento.
4. (1,5 ptos) Explique como sería la estrategia óptima que deberá seguir un pasajero con el fin de minimizar el tiempo esperado que tardará en llegar a su destino.

Solución Problema 5

1. Entonces, lo que modelamos es la gente que hay en la estación justo antes de subirse a un bus, por lo tanto en un periodo siempre: se sube la gente y luego llegan los que trataran de irse en el próximo bus.

   Esta cadena admite probabilidades estacionarias porque es finita (a lo más hay N personas esperando) y tiene una única clase recurrente aperiódica (es fácil ver que todos los estados se comunican entre si).

   Dado que todos los estados están conectados entre si, no tiene sentido dibujar la cadena. Solo debemos entregar una expresión para las probabilidades de transición. Para esto condicionamos sobre la cantidad de pasajeros que se suben en el próximo bus.

$$P_{ij} = \sum_{k=k^*}^{i} P_{ij}|(\text{Suben k personas})P[\text{Suben k personas}]$$

   Donde $k^* = \text{máx}\{0,\ (i-j)\}$

   Si el estado actual es i personas en el paradero y el bus es del tipo rápido, el número de personas que abordará el bus seráel $\text{mín}(K,\ i)$ con probabilidad 1. Si el bus es del tipo lento la probabilidad que se suban k personas será:

   Caso $i \leq K$:

$$P[\text{Suben k personas =k}] = \binom{i}{k} d^k (1-d)^{i-k} \qquad\qquad k \leq i$$

   Caso $i > K$:

$$P[\text{Suben k personas =k}] = \begin{cases} \binom{i}{k} d^k (1-d)^{i-k} & k < K \\ \sum_{n=K}^{i} \binom{i}{n} d^n (1-d)^{i-n} & k = K \end{cases}$$

   Donde los casos omitidos tienen probabilidad de ocurrencia nula.

   De esta manera, sin saber de qué tipo es el bus que va a salir del terminal se tiene que:

Caso 1: $i \leq K,\ k < i$

$$P[N_B = k] = \binom{i}{k} d^k (1-d)^{i-k} \cdot p_l$$

Caso 2: $i \leq K,\ k = i$

$$P[\text{Suben k personas =k}] = d^k \cdot p_l + p_r$$

Caso 3: $i > K,\ k < K$

$$P[\text{Suben k personas =k}] = \binom{i}{k} d^k (1-d)^{i-k} \cdot p_l$$

Caso 4: $i > K,\ k = K$

$$P[\text{Suben k personas =k}] = \sum_{n=K}^{i} \binom{i}{n} d^n (1-d)^{i-n} \cdot p_l + p_r$$

Entonces, para terminar nuestro calculo tan solo necesitamos calcular una expresión genérica para

$$P_{ij}|(\text{Suben k personas})$$

Sin embargo, si k de las i personas se suben al bus entonces quedan tan solo $i-k$ personas en el terminal, entonces para completar las j personas necesitamos que lleguen $j-i+k$ (o más en el caso $N = j$) personas al terminal Entonces:

$$P_{ij}|(\text{Suben k personas}) = \begin{cases} \frac{(\lambda \cdot 15)^{j-i+k} e^{-\lambda \cdot 15}}{(j-i+k)!} & si \quad j < N \\ \sum_{n=j-i+k}^{\infty} \frac{(\lambda \cdot 15)^n e^{-\lambda \cdot 15}}{n!} & si \quad j = N \end{cases}$$

Solo resta reemplazar.

2. Sabemos que si cuando llega hay menos de K pasajeros siempre podrá tomar el siguiente bus rápido que pase, si todavía está esperando en el paradero y podrá irse en el siguiente bus lento con probabilidad d (la probabilidad que quiera tomarlo). Si llamamos T_v al tiempo que transcurre desde que pasa el primer bus hasta que llega a su destino podemos escribir:

$$E[T_v] = T_r \cdot p_r + T_l \cdot p_l \cdot d + (1-d) \cdot (15 + E[T_v])$$

Esto, porque si el primer bus que pasa es lento y no lo toma, estará en la misma situación en 15 minutos más. Así:

$$E[T_v] = \frac{T_r \cdot p_r + T_l \cdot p_l \cdot d + (1-d) \cdot 15}{d}$$

Por otra parte, el tiempo que en promedio falta desde que llega al paradero hasta que pasa el primer bus es 7,5 minutos puesto que condicional a que ocurre en los 15 minutos entre buses, la esperanza del tiempo en que ocurri el evento está uniformemente distribuida.

Finalmente la esperanza del tiempo que transcurre desde que el pasajero llega al terminal hasta que llega a su destino será $7,5 + E[T_v]$

3. El Trade-Off que enfrenta es tomar el bus lento y demorar más en el viaje o esperar en el terminal a que eventualmente pase el bus rápido (y me pueda subir) y tardar menos en el viaje.

4. La política óptima debe estar condicionada al número de pasajeros que están en la fila antes del pasajero en cuestión. Así, dado que estoy en la posición k-ésima debo decidir si se está dispuesto a viajar en un bus lento o es mejor esperar hasta que venga el próximo bus rápido.

   Hay que notar que la estrategia óptima de quién esté en la posición k será también óptima para todos quienes estén tras él y que la estrategia para quienes estén muy atrás en la fila será intentar subir a cualquier bus. Por otra parte, claramente serán estrategias subóptimas donde una vez que se decide esperar por un bus rápido (pudiendo subir a uno lento) en una decisión posterior se elija tomar un bus lento. Por último, dado que la capacidad del bus es K las decisiones serán iguales por tramos de K pasajeros en la fila.

   Como sólo se debe decidir cuando existe la posibilidad de tomar un bus lento se esperará (por un bus rápido) si

$$T_l > \left[\frac{k}{K}\right]^+ \left\{\sum_{i=1}^{\infty} p_r p_l^{i-1} \cdot 15 \cdot i\right\} + T_r$$

Problema 6

Una línea aérea ofrece 2 tipos de pasajes: los pasajes *normales* y los pasajes *rebajados*. Los pasajes normales son vendidos el día del vuelo a un precio C_n [\$], mientras que los pasajes rebajados se venderán a un precio C_r [\$] ($C_r < C_n$) anticipadamente sólo a quienes estén inscritos en el programa de viajeros frecuentes. El avión tiene una capacidad de N asientos.

Se sabe que el número de personas que llega a comprar pasajes a precio normal el día del vuelo es una variable aleatoria con distribución conocida (la probabilidad que lleguen k personas a comprar el día del vuelo es q_k, $\forall k \in \mathbb{N}$).

Al programa de viajeros frecuentes se incorporan clientes de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa $\lambda[\frac{\text{clientes}}{\text{día}}]$ y permanecen en el programa un tiempo exponencialmente distribuido de media μ [días]. Sin embargo, la gerencia comercial ha notado que el número de pasajes demandados a precio rebajado por los miembros de este programa queda bien modelado por una variable aleatoria distribuida Poisson de parámetro $\alpha\frac{\text{pasajes}}{\text{vuelo}}$, independiente de cuantos inscritos existan en el programa al momento de poner a la venta un vuelo.

El gerente de la línea aérea ha observado que en muchas ocasiones se vende un gran número de pasajes a precio rebajado y que para el día del vuelo quedan pocos asientos para vender a precio normal, por lo que muchos clientes que llegan ese día (dispuestos a pagar el precio normal) se quedan sin poder viajar. Además, por cada uno de estos clientes, la línea aérea incurre en un costo S [\$] por concepto de imagen.

Por todo lo anterior, el gerente ha decidido poner un límite superior de N_R al número de pasajes a precio rebajado que se pueden vender para cada vuelo, con el fin de maximizar los beneficios esperados.

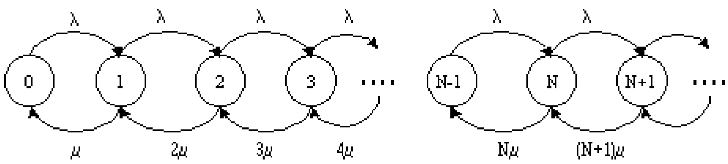
1. (2,0 ptos) Modele el número de clientes socios del programa de viajero frecuente como una cadena de Markov en tiempo continuo. ¿Qué condiciones deben satisfacer los parámetros del problema para que exista estado estacionario?. Encuentre el número esperado de clientes que en el largo plazo estarán en este programa.
2. (1,5 ptos) Condicional en que se vendieron $(N-x)$ pasajes rebajados (de modo que quedan x pasajes para venderse el día del vuelo) ¿Cuál es el valor esperado de los *beneficios* (ingresos - costos) totales?. Llame a este valor $B(x)$.
   <u>HINT:</u> Note que si ya se han vendido $(N-x)$ pasajes rebajados, y Ud. decide no vender más de ese tipo de pasajes, el valor esperado de sus beneficios (condicional en esa información) será $B(x)$.
3. (1,5 ptos) Suponga que ya se han vendido $(N-x)$ pasajes rebajadas, y llega un socio más a pedir un pasaje rebajado. Ud. podría ya sea vendérselo o bien indicarle que se agotaron las pasajes rebajados.

Evalúe cuál de esas alternativas es mejor para la compañía.
HINT: Compare los beneficios esperados de decidir vender el pasaje a precio rebajado v/s esperar al día del vuelo.

4. (1,0 ptos) A partir de los puntos anteriores, ¿Cómo determinaría el N_r^*, el número máximo de pasajes a vender a precio rebajado? Determine el beneficio esperado bajo esta política.

Solución Problema 6

1. El modelo queda como sigue:



Esto corresponde a un sistema M/M/∞, en que las llegadas son la incorporación de clientes al programa de viajeros frecuentes y las salidas ocurren según el tiempo de permanencia en el programa de cada cliente. Este sistema siempre tiene probabilidades estacionarias.

El tiempo promedio de permanencia de un cliente en el programa es:

$$W = \frac{1}{\mu}$$

Luego usando la fórmula de Little se obtiene que el número esperado de clientes que en el largo plazo estarán en el programa es:

$$L = \frac{\lambda}{\mu}$$

2. El valor esperado de los ingresos totales condicional a que se vendieron $(N-x)$ pasajes rebajados es :

$$E(I_{total}/N_{reb} = N - x) = C_r \cdot (N - x) + C_n \cdot \left[\sum_{k=1}^{x} k \cdot q_k + \sum_{k=x+1}^{\infty} x \cdot q_k \right]$$

Por otro lado los costos esperados están dados por:

$$E(C_{total}/N_{reb} = N - x) = S \cdot \sum_{k=x+1}^{\infty} (k - x) \cdot q_k$$

Finalmente el valor esperado del los beneficios totales de un vuelo es:

$$B(x) = C_r \cdot (N - x) + C_n \cdot \left[\sum_{k=1}^{x} k \cdot q_k + \sum_{k=x+1}^{\infty} x \cdot q_k \right] - S \cdot \sum_{k=x+1}^{\infty} (k - x) \cdot q_k$$

3. Se deben comparar los beneficios en ambos casos.
   Si no le vende el pasaje el beneficio esperado es : $B(x)$
   Si se lo vende, tenemos un pasaje menos , pero ganamos por el pasaje vendido : $B(x-1)$.

   Luego para evaluar la decisión debemos comparar:

$$B(x) \text{ v/s } B(x-1)$$

   $B(x)$ es el calculado en la parte anterior. $B(x-1)$ queda como sigue:

$$B(x-1) = C_r \cdot (N-x+1) + C_n \cdot \left[\sum_{k=1}^{x-1} k \cdot q_k + \sum_{k=x}^{\infty} (x-1) \cdot q_k \right] - S \cdot \sum_{k=x}^{\infty} (k-x+1) \cdot q_k$$

   Haciendo la diferencia entre $B(x-1)$ y $B(x)$ se cancelan términos y se obtiene:

$$B(x-1) - B(x) = C_r - S \cdot \sum_{k=x}^{\infty} 1 \cdot q_k - C_n \cdot \sum_{k=x}^{\infty} 1 \cdot q_k$$

   Luego se opta por vender el pasaje si $B(x-1) - B(x) > 0$ y rechazar al cliente en caso contrario.

4. El numero de pasajes ha vender a precio rebajado es tal que $B(x-1) = B(x)$, es decir, si llega alguien a pedir un pasaje rebajado la linea aérea esta indiferente entre vendérselo o decirle que se agotaron los pasajes.

   Sea N_r^* el número máximo de pasajes a vender a precio rebajado. Luego el beneficio bajo esta política es:

$$E[U] = \sum_{k=0}^{N_r^*} B(N-k) \cdot \frac{\alpha^k \cdot e^{-\alpha}}{k!} + \sum_{k=N_r^*+1}^{\infty} B(N-N_r^*) \cdot \frac{\alpha^k \cdot e^{-\alpha}}{k!}$$

Problema 8

El Call Center de una Isapre recibe llamadas correspondientes a Reclamos y a Consultas, las cuales pueden ser modeladas como Procesos de Poisson de tasas λ_R y λ_C [llamadas/hora], respectivamente. Todos los reclamos son derivados al Departamento de Atención al Cliente para su análisis y solución, al igual que una fracción p de las consultas. Este departamento demora un tiempo exponencialemente distribuido de tasa μ en procesar cada solicitud, ya sea reclamo o consulta. La fracción restante de las consultas corresponde a aquellas que requieren de un estudio más especializado, por lo que son derivadas a la Gerencia de Estudios de la compañía. Esta gerencia demora un tiempo exponencialmente distribuido de tasa $2 \cdot \mu$ en el procesamiento de cada consulta. Suponiendo que todas las unidades de la compañía trabajan 8 horas diarias de Lunes a Viernes, responda:

1. (1,0 ptos) Si la semana pasada se recibieron R reclamos y C consultas, ¿cuál es el valor esperado de llamadas que esta semana serán derivadas al Departamento de Atención al Cliente? ¿y a la Gerencia de Estudios?

2. (1,0 ptos) ¿Cuál es la probabilidad de que la próxima llamada que se reciba corresponda a un reclamo?

El Departamento de Atención al Cliente debe emitir diariamente un reporte del número de llamadas recibidas en cada hora de operación. Lamentablemente, por un error computacional perdió toda la información de las consultas recibidas en últimas 4 horas del día, pudiéndose rescatar solamente el dato de que en dicho intervalo de tiempo se recibieron Q consultas. Ante esta eventualidad, el Jefe del Departamento le encomienda a Ud. intentar reconstruir esta información.

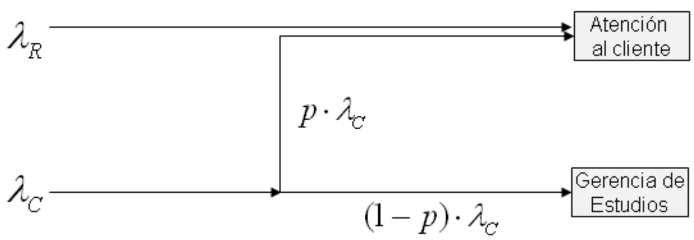
2. (1,5 ptos) Utilizando sus conocimientos de probabilidades determine cuál será la distribución de probabilidad que rige al número de llamadas recibidas en la primera hora de operación "perdida". Intuitivamente, ¿cuál será la configuración más probable para las llamadas recibidas en cada una de las 4 horas de operación sin registros?.
3. (1,0 ptos) Si un trabajador del centro de atención recuerda con seguridad que en la última hora de operación se recibieron $\frac{Q}{3}$ llamadas, ¿cambia su respuesta de la parte anterior?. Si su respuesta es afirmativa encuentre la distribución de probabilidad que rige al número de llamadas recibidas en la primera hora de operación "perdida"en esta nueva situación.

Suponga ahora que el Call Center funciona las 24 horas en forma continua

4. (1,5 ptos) ¿Cómo modificaría el modelo de llegadas enunciado, de modo que se ajuste mejor a la nueva realidad? Razone en función de la variación de la tasa a lo largo del día.

Solución Problema 8

Esta es la clásica pregunta de Poisson, solo basta recordar el control 1. Para resolverla solo hay que notar que los tiempos de atención en el Call-Center solo son elementos distractores. Primero necesitamos esquematizar la situación:



Llegada de llamadas

1. (1,0 ptos) Primero notamos que, dado que las llegadas son poissonianas, no nos interesa el numero de llamadas que llegaron la semana pasada. Ahora notando que el número de llamadas que llegan al departamento de atención al clientes sigue un proceso de poisson de tasa $\lambda_R + p\lambda_C[\frac{llamadas}{hora}]$ implica que la esperanza de N_A, el numero de llamadas que llegan en una semana al Dpto de atención al cliente sera:
$$E[N_A] = (\lambda_R + p\lambda_C) \cdot 40$$
Dado que las llegadas a la gerencia de estudios siguen un proceso de poisson de tasa $(1-p) \cdot \lambda_C[\frac{llamadas}{hora}]$ es que la esperanza de N_G, el número de llamadas que llegan en una semana a la gerencia de estudios

será:

$$E[N_G] = (1-p) \cdot \lambda_C \cdot 40$$

2. (1,0 ptos) La pregunta es ¿Cuál es la probabilidad que una exponencial de tasa λ_R le gane a una exponencial de tasa λ_C. La respuesta es inmediata:

$$P[\text{Proxima llegada es reclamo}] = \frac{\lambda_R}{\lambda_R + \lambda_C}$$

3. (1,5 ptos) Dado que los tiempos condicionales de llegadas de un proceso de poisson hasta un instante T se distribuyen de acuerdo a una uniforme $[0, T]$ la probabilidad que una llamada (del total Q) halla llegado en un intervalo de 1 hora en particular será:

$$P = \frac{1}{4}$$

Entonces la probabilidad que N_i, el número de llamadas que llegan en la hora i (perdida) sea igual a k será :

$$P[N_i = k] = \binom{Q}{k} \cdot (\frac{1}{4})^k (\frac{3}{4})^{Q-k}$$

La intuición nos dice que la configuración más probable para la realización de las llegadas es $\frac{Q}{4}$ cada una de las 4 horas perdidas. Esto puede ser demostrado matemáticamente, pero escapa al propósito de la pregunta.

4. (1,0 ptos) Por supuesto que cambia la respuesta, dado que se que en 3 horas solo llegaron $\frac{2Q}{3}$ de los llamados. Por los mismos razonamientos anteriores se tiene que la probabilidad que una llamada halla llegado en un intervalo de 1 hora (perdida) en particular será:

$$P = \frac{1}{3}$$

Entonces la probabilidad que N_i, el número de llamadas que llegan en la hora i (perdida) sea igual a k será :

$$P[N_i = k] = \binom{\frac{2Q}{3}}{k} \cdot (\frac{1}{3})^k (\frac{2}{3})^{\frac{2Q}{3}-k}$$

5. (1,5 ptos) En propósito de esta pregunta es pensar en que la heterogeneidad de las llegadas durante las 24 horas del día (llegadas con un peak en la tarde y con mínimos en la madrugada) hacen infactible operar bajo los supuestos de un proceso de poisson homogéneo, por lo que los resultados anteriores no son extendibles.

Problema 9

Una tienda comercial ha determinado que los clientes llegan de acuerdo a un proceso de Poisson de parámetro λ [clientes/semana]. La tienda ofrece un único producto y los clientes llegan sin conocer de antemano cuál es el precio del producto. Los clientes son heterogéneos en el sentido que su disposición a pagar por el producto es distinta (entendemos por disposición a pagar la cantidad de dinero máxima que el cliente estaría dispuesto a pagar por el producto). Desde el punto de vista de la tienda la disposición a pagar, que llamaremos d, del cliente es una variable aleatoria con función de densidad $f(d)$ continua en $[0, \infty)$ y función de distribución $F(d)$ conocidas. Un cliente compra el producto si su disposición a pagar es mayor que el precio al que la tienda vende el producto; en caso contrario se va sin comprar. Suponga que la tienda dispone de inventario infinito.

1. (1,0 ptos) Si la tienda vende el producto a un precio P, ¿cuál es la probabilidad que un cliente cualquiera que entra a la tienda compre el producto? (a esta probabilidad la llamaremos $q(P)$). ¿Cuál es la ley de probabilidad para el número de personas que compra el producto y para el número de personas que se van sin comprar en una semana dada?. ¿Cuánto vale el ingreso esperado por ventas en una semana cualquiera?.
2. (0,5 ptos) ¿Qué condiciones debe satisfacer P^*, el precio que maximiza el ingreso esperado por ventas en una semana cualquiera?

Suponga ahora que el inventario disponible es de C unidades al comienzo de una semana dada, y no tiene la posibilidad de reabastecerse en caso que se agote el producto.

3. (1,0 ptos) ¿Cuánto vale $B(P, C)$, el ingreso esperado por ventas para la esa semana si se vende a un precio P?

La tienda operará durante T semanas sin reabastecerse del producto ni modificar el precio, con un inventario inicial de C unidades.

4. (2,0 ptos) ¿Puede modelarse el inventario disponible al inicio de cada semana como una cadena de Markov? ¿Puede modelarse el inventario disponible en cada instante del tiempo como una cadena de Markov en tiempo continuo? Justifique y escriba explícitamente los modelos si corresponde.

Por último, considere que la tienda puede modificar el precio al comienzo de cada semana, manteniéndolo constante durante el resto de la semana.

5. (1,5 ptos) Formule un modelo de programación dinámica que permita tomar las decisiones de precio semana a semana, de manera de obtener el máximo ingreso esperado en un horizonte de T semanas, con un inventario inicial de C unidades.

<u>HINT:</u> Todas las partes de esta pregunta son independientes y pueden dejarse expresadas en función de resultados de las partes anteriores, aún cuando no los hayan calculado.

Solución Problema 9

1. (1,0 ptos) Si el precio del producto es P, la probabilidad que un cliente en particular compre el producto será:

   $$P[\text{compra}] = P(d > P) = 1 - P(d \leq P) = 1 - F(P) = \overline{F}(P)$$

   El proceso de compra es un proceso de poisson filtrado. Dado una probabilidad de compra q, y dada la homogeneidad de los clientes, se tiene que la llegada de clientes que compran sigue un proceso de poisson de tasa $\lambda \cdot q$, entonces la probabilidad que N_c, el número de personas que compran en la semana sea k, será:

   $$P[N_c = k] = \frac{(\lambda \overline{F}(P))^k e^{-\lambda \overline{F}(P)}}{k!}$$

   De la misma forma, el proceso de gente que no compra es un proceso de poisson filtrado. Dado una probabilidad de no compra q, y dada la homogeneidad de los clientes, se tiene que la llegada de clientes que no compran sigue un proceso de poisson de tasa $\lambda \cdot q$, entonces la probabilidad que N_c, el número de personas que no compran en la semana sea k, será:

   $$P[N_{nc} = k] = \frac{(\lambda F(P))^k e^{-\lambda F(P)}}{k!}$$

De esta forma el ingreso esperado por semana será:

$$E[\text{Ingresos}] = \lambda\overline{F}(P)P$$

2. (0,5 ptos) Basta derivar e igualar a cero. Tenemos que la condición será:

$$-f(P)P + (1 - F(P)) = 0 \Rightarrow P^* = \frac{1 - F(P^*)}{f(p^*)}$$

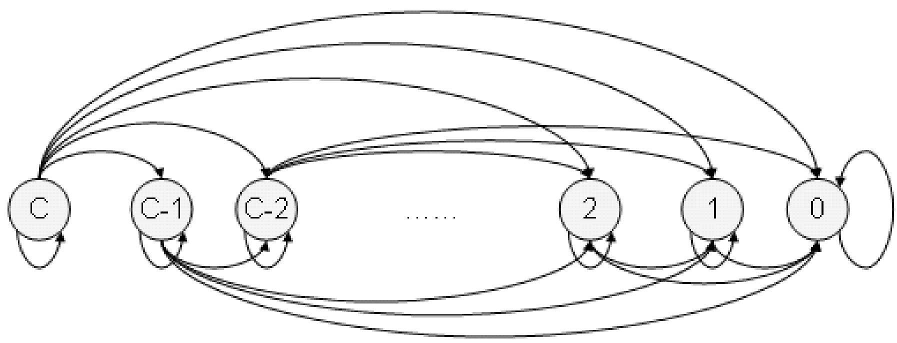
3. (1,0 ptos) La expresión para el ingreso esperado es la siguiente:

$$B(P, C) = P \cdot \sum_{k=0}^{\infty} P[N_C = k] \cdot \text{mín}\{k, C\}$$

$$B(P, C) = P[\cdot \sum_{k=0}^{C} k \cdot \frac{(\lambda\overline{F}(P))^k e^{-\lambda\overline{F}(P)}}{k!} + C \cdot \sum_{k=C}^{\infty} \frac{(\lambda\overline{F}(P))^k e^{-\lambda\overline{F}(P)}}{k!}]$$

4. (2,0 ptos)En ambos casos la modelación es posible. La justificación se las dejamos a los ayudantes: veamos cada uno de ellos.[2]

   - Markov Discreto:
     La cadena que representa el inventario al comienzo de cada semana será:

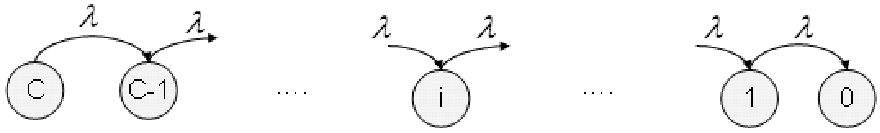


Modelo discreto

En este modelo las probabilidades de transición quedan definidas de la siguiente manera:

$$P_{ij} = \begin{cases} \frac{(\lambda F(P))^{i-j} e^{-\lambda F(P)}}{(i-j)!} & \forall i \geq j \quad j \neq 0, \\ \sum_{k=i}^{\infty} \frac{(\lambda F(P))^k e^{-\lambda F(P)}}{k!} & \forall i \geq 0 \quad j = 0, \\ 1 & i = j = 0, \\ 0 & \sim . \end{cases}$$

- Markov Continuo:
  La cadena que representa el inventario al comienzo de cada semana será:



Modelo continuo

las tasas de transición son las identificadas en la figura. NOTEN QUE LA TASA λ de la figura es en realidad $\lambda \cdot \overline{F}(P)$.(no tuve tiempo para cambiar la figura)

5. (1,5 ptos)De acuerdo al procedimiento regular debemos identificar:

   - Etapas: Cada una de las semanas del Horizonte de planeación ($t = 1, ..., T$).
   - Variables de Estado:
     I_t Inventario disponible al comienzo de la semana t
   - Variable de decisión:
     P_t Precio a fijar al comienzo de la semana t
   - Recursividad
     Etapa $T+1$:
     $$V_{T+1}(I_{T+1}) = 0$$
     Etapa t:
     $$V_t(I_t, P_t) = B(I_t, P_t) + \sum_{k=0}^{I_t} \frac{(\lambda\overline{F}(P))^k e^{-\lambda\overline{F}(P)}}{k!} V^*_{t+1}(I_t - k) + \sum_{k=I_t}^{\infty} \frac{(\lambda\overline{F}(P))^k e^{-\lambda\overline{F}(P)}}{k!} V^*_{t+1}(0)$$
     Donde
     $$V^*_t(I_t) = \max_{P_t}\{V_t(I_t, P_t)\}$$
   - Condiciones de borde:
     $$\begin{aligned} I_t &= 0 \\ V^*_t(0) &= 0 \text{ (no es necesaria)} \end{aligned}$$

Problema 10 (propuesto)

Los alumnos del D.I.I. se aprestan a rendir su examen de final de su curso favorito. El ayudante del ramo recibe los exámenes de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa $\lambda \frac{\text{exámenes}}{\text{hora}}$ y los corrige demorándose un

[2] En está parte es fundamental notar que la idea de la pregunta es no considerar el horizonte de tiempo T. Esto trae muchas simplificciones a la formulación. El considerar este horizonte de tiempo es posible, pero escapa al espiritu de la pregunta.

tiempo exponencialmente distribuido con media $1/\mu_1$ [horas] en cada uno. Como resultado de su correción el ayudante puede decidir aprobar al alumno o bien traspasar la evaluación al profesor del ramo, para que él tome la decisión. La probabilidad de que una evaluación cualquiera sea transferida al profesor es p. El Profesor demora un tiempo distribuido exponencialmente de media $1/\mu_2$ [horas] en estudiar una situación cualquiera. Su decisión puede ser la aprobación o reprobación del alumno, y se sabe que reprueba a una fracción R de las evaluaciones que recibe. En los casos en que se decide reprobar a un alumno, el profesor debe publicar inmediatamente esta situación.

Por otra parte, en el caso que un alumno sea aprobado, ya sea por el ayudante o el profesor, se deben cumplir una serie de procedimientos administrativos (cálculos de promedios y otras cosas varias) los que terminarán con publicación de la situación final y la respectiva nota del examen. Estos trámites son realizados con mucha dedicación por alguno de los 2 auxiliares del ramo demorando un tiempo exponencialmente distribuido con media $1/\mu_3$ [horas] por cada alumno aprobado.

1. (1,5 ptos) Modele el proceso descrito como un sistema de colas. ¿Qué relaciones deben satisfacer λ, μ_1, μ_2, μ_3, p y R para que se alcance régimen estacionario?
2. (1,0 ptos) En promedio, ¿Cuánto tiempo debe esperar un alumno desde que entrega su examen hasta ver publicada su situación final?.
3. (1,5 ptos) ¿Qué fracción de los alumnos que resultan aprobados ha sido por decisión del profesor?. Sólo para los alumnos que son aprobados: ¿Cuánto tiempo pasa, en promedio, desde que se recibe el examen hasta que se publican sus notas y situación final?

Suponga ahora que los tiempos de atención no son exponenciales sino que se distribuyen aleatorios, con distribución de probabilidad $F_1(t)$, $F_2(t)$ y $F_3(t)$, para el ayudante, el profesor y c/u de los auxiliares respectivamente. Además, el ayudante que recibe los exámenes siempre les da prioridad a las mujeres, por lo que si está trabajando en la correción de la prueba de un hombre y llega el examen de una mujer, dejará la corrección hasta donde iba para retomarla después (la probabilidad que un alumno sea hombre es q).

4. (2,0 ptos) Con estas modificaciones ¿Puede modelar proceso descrito como un sistema de colas de Jackson?. Realice en forma esquemática una corrida de simulación que permitiría contestar cuánto tiempo en promedio debe esperar un alumno desde que entrega su examen hasta ver publicada su situación final.

Problema 11 (propuesto)

Un conductor se acerca en su automóvil a una intersección por una vía secundaria, y enfrenta un disco "Pare". No hay ningún vehículo antes que él esperando pasar (por su misma vía). Por la vía principal (la que tiene prioridad) el paso de vehículos a través de la intersección se puede modelar como un proceso Poisson de tasa λ [vehículos/segundo].

El conductor que llega por la vía secundaria detendrá su vehículo al llegar a la intersección, y observará cuánto tiempo falta para que el próximo vehículo atraviese la intersección por la vía principal. Si ese tiempo es igual o mayor que τ segundos él considerará que es seguro pasar, y atravesará la intersección. Por el contrario, si faltan menos de τ segundos para que pase el próximo vehículo por la vía principal, él pensará que es imprudente pasar, y esperará detenido a que ese vehículo pase, y seguirá esperando hasta que se produzca una "brecha" igual o mayor a τ segundos. Asuma que en la esquina hay buena visibilidad, de manera que el conductor siempre puede determinar con exactitud cuánto falta para que pase el próximo vehículo.

El objetivo de este problema es encontrar la distribución del tiempo que este conductor deberá estar detenido en la intersección antes de poder pasar, tiempo que denotaremos W.

1. Calcule la probabilidad de pasar de inmediato (i.e. $\Pr[W = 0]$).

2. Suponga que nuestro conductor no pudo pasar de inmediato, pues al llegar a la intersección vio que venía un auto por la vía principal el cual iba a atravesar la intersección en menos de τ segundos. Llamemos X al tiempo que transcurre hasta que dicho auto (el que viene por la vía principal) atraviesa la intersección. Argumente que, con la información dada, la función de densidad de X viene dada por $f_X(x) = C\lambda \exp(-\lambda x)\, \forall x \in [0, \tau]$ y $f_X(x) = 0\, \forall x \notin [0, \tau]$. Calcule el valor de la constante C y el valor esperado de X.

3. El auto que venía por la vía principal acaba de atravesar la intersección. Llame W_2 al tiempo que transcurrirá **a partir de este instante** hasta que nuestro conductor logre pasar. Compare la distribución de W_2 con la distribución (a priori) de W. Justifique.

4. Calcule $E[W]$. Indicación: Calcule la esperanza condicional en el evento que nuestro conductor haya podido pasar de inmediato o se haya visto obligado a esperar. Use sus resultados de las partes (1), (2) y (3).

5. Argumente que W se puede expresar como $W = \sum_{i=1}^{N} X_i$ donde N es una variable aleatoria y $\{X_i\}_{i \geq 1}$ son variables aleatorias i.i.d. que además son independientes de N. Especifique la distribución de N y de X_i.

Dudas y/o errores:
Patricio Hernández G.
shernand@ing.uchile.cl