Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: INVESTIGACIÓN OPERATIVA

Cadenas de Markov con Beneficios y Decisiones

Denis Sauré V.
Julio, 2003.

1. Problemas de Cadenas de Markov con Beneficios y Decisiones

1. El mercado de las financieras de cierto país está compuesto por N financieras que prestan sus servicios a un mercado potencial de K clientes.

   Un cliente que en un período se encuentra sin crédito va a pedir uno en el período siguiente con probabilidad q. Además si pide un préstamo lo debe pagar al período siguiente y mientras no lo pague no puede acceder a otro crédito en ninguna institución del sistema financiero.

   Cada vez que un cliente paga la deuda la financiera obtiene un beneficio de B [$]. Si un cliente no paga el crédito, la financiera traspasa la cobranza a una empresa externa (incurriendo en un costo C [$]) la que se demora 1 período en *solucionar* el problema. La probabilidad de que un cliente no pague el crédito inmediatamente es p. Suponga que un cliente que acaba de pagar su deuda (ya sea inmediatamente o después de recibir la visita de un cobrador) no pide inmediatamente un nuevo crédito. Los costos fijos de operación, por período, de una finaciera son θ [$].

   a) Construya una cadena de Markov que represente el estado financiero de una persona en particular. Identifique los estados y probabilidades de transición.

   b) Utilizando el resultado de la parte anterior formule una cadena de Markov con beneficios que describa los costos e ingresos para una financiera, asociados con los créditos otorgados a un cliente. Determine las probabilidades estacionarias (¿Por qué existen?), el beneficio esperado por transición en el estado estacionario (g) y el vector de beneficios relativos asintótico (W).

   c) ¿Cuál es el beneficio esperado que le reporta un cliente a una financiera en un horizonte de t períodos?.

   d) Considerando el cálculo anterior determine el beneficio esperado de operación de una financiera durante t períodos. Determine el número de financieras que operarán en el largo plazo, explicando claramente su razonamiento.

2. Considere un mercado laboral que opera de la forma que se describe a continuación. Cada mes un trabajador puede ya sea conservar o perder su actual empleo. La probabilidad que conserve su trabajo depende sólo del número de meses que lleva en él, siendo p_1 la probabilidad que un trabajador que acaba de terminar su primer mes de trabajo conserve su empleo para el mes siguiente, p_2 la probabilidad que un trabajador que lleva 2 meses empleado conserve su trabajo un mes más y p_3 la probabilidad que un trabajador que lleva 3 o más meses empleado conserve su trabajo por un mes más. Un trabajador que está desempleado en un mes dado seguirá en esa condición el mes siguiente con probabilidad p_0, y conseguirá empleo con probabilidad $1 - p_0$. Cuando un trabajador pierde un empleo pasará al menos 1 mes desempleado.

   El sueldo de un trabajador es de w_1 [$/mes] en su primer mes de trabajo en un empleo, w_2 [$/mes] en su segundo mes de trabajo y w_3 [$/mes] en el tercero o cualquier mes posterior. Los trabajadores deben destinar cada mes una fracción f de su sueldo a pagar un seguro de desempleo administrado por el estado. Cuando un trabajador está desempleado el estado le proporciona un ingreso de H [$/mes].

   a) Modele la situación laboral de un trabajador (si está empleado o desempleado) como una Cadena de Markov. Justifique la existencia de una ley de probabilidades estacionarias e indique cómo calcularlas (no es necesario que las calcule).

   b) ¿Cuánto tiempo pasa, en promedio, desde que una persona pierde su trabajo hasta que consigue uno nuevo?.

   c) Calcule cuál debe ser el valor de f para que el estado pueda, en promedio, financiar los beneficios que otorga a quienes están desempleados con los pagos realizados por los trabajadores por concepto de seguro de desempleo (responda en términos de las probabilidades estacionarias y los demás parámetros del problema).

d) Formule un modelo de Markov con beneficios que permita calcular el ingreso esperado para el año 2005 un trabajador que comienza desempleado en Enero de ese año. ¿Cuánto mayores serán, en promedio, los ingresos de ese año de un trabajador que cumple su sexto mes de trabajo en Enero?. ¿Cuál es el ingreso esperado para el año 2005 de un trabajador que consigue empleo en Noviembre de 2002 (habiendo estado desempleado en Octubre)?.

e) Suponga que en Diciembre del 2002, para celebrar el cambio de milenio, las empresas pagarán un aguinaldo de S [$] a aquellos trabajadores que no despidan (i.e. aquellos que seguirán en sus puestos para Enero del 2004). ¿Qué cambiaría en su modelo de la parte (c) para poder realizar los cálculos pedidos bajo este nuevo escenario?.

3. Una tienda comercial se dedica principalmente a la venta de equipos electrógenos. La demanda por estos productos en una semana dada puede tomar sólo dos valores: 0 o 1 [unidades]. El comportamiento de la demanda es susceptible de ser modelado como una cadena de Markov: la probabilidad que la demanda sea igual a 1 en una semana dada es α si la demanda fue 1 la semana anterior y β si la demanda fue 0 la semana anterior, independiente de lo que haya ocurrido 2 o más semanas antes.

La tienda obedece a la siguiente política de inventarios: al comienzo de cada semana se observa el inventario disponible en bodega. Si este es igual o superior a 2, no se hace nada. Si es menor que 2, se pone una orden de compra por 3 unidades. El proveedor demora $L = 1 + A$ semanas en entregar el pedido, donde A es un atraso aleatorio con distribución geométrica de parámetro $1 - p$ (vale decir, si se pone una orden de compra esta semana, hay una probabilidad p de que el pedido llegue la próxima semana; de no ocurrir así, hay una probabilidad p que llegue a la semana siguiente; ... si a las k semanas todavía no se ha recibido hay una probabilidad p que llegue en la semana $k + 1$).

Nunca se pone una segunda orden de compra mientras haya un pedido ya hecho que todavía no ha sido recibido.

El precio venta de un equipo electrógeno es A[$] y el costo unitario es de C[$] ($A > C$). Poner una orden de compra tiene un costo de S[$]. Rechazar a un cliente (i.e. no poder venderle por no tener unidades en inventario) tiene un costo de imagen que la tienda valora en H[$].

Formule un modelo de Markov con beneficios que permita cuantificar el valor esperado de las utilidades de la tienda para lo que resta de este invierno-crisis eléctrica (13 semanas), sabiendo que al comenzar esta semana había 2 grupos electrógenos en bodega y que la semana anterior se había vendido uno.

4. Una Isapre está evaluando ofrecer cobertura total para una enfermedad catastrófica. Para ello, la Isapre desea conocer cuál es el costo esperado asociado a esta enfermedad para una persona que se encuentra actualmente sana (la Isapre sólo acepta personas sanas). Se conocen las siguientes estadísticas:

- Una persona tiene una probabilidad de un 1 % de contraer la enfermedad cada año. Al contraer la enfermedad pasa a ser un enfermo latente cuya enfermedad aún no ha sido detectada.
- Debido a circunstancias varias, existe una probabilidad de un 30 % de que un enfermo latente (al que no le ha sido detectada la enfermedad) pase a ser detectado. También existe una probabilidad 0.5 de que un latente se enferme (lo cual hace evidente su condición), y un 0.2 de que continue un año más en su estado actual.
- Cada paciente enfermo tiene una probabilidad de un 50 % de seguir enfermo un año más, pero lamentablemente en el resto de los casos el paciente muere.

Los costos para la empresa son los siguientes:

Estado	Costo
Paciente sano	0 [$/año]
Pacientes latentes sin detectar	0 [$/año]
Pacientes latentes detectados	1.000 [$/año]
Pacientes enfermos	2.000 [$/año]

a) Formule una cadena de Markov que represente la evolución de esta enfermedad.

b) Calcule el costo asociado a un paciente que inicialmente está sano, en un horizonte de 10 años.

c) Calcule la esperanza de vida de un paciente, partiendo de cualquier estado.

5. Armijo Catalán, un jefe de Producto de Cuentas Corrientes de una importante institución financiera, necesita estimar el comportamiento de las Cuentas Corrientes durante el siguiente año. Para ello desea estudiar 2 variables relacionadas al producto: el Stock de Cuentas Corrientes (Número de cuentas vigentes) y el Saldo Promedio de éstas.

Armijo ha observado que bajo la situación económica actual, ambas variables se relacionan directamente con la tasa de interés interbancaria para cada mes (la tasa permanece constante durante el mes). La tasa en cuestión puede ser ALTA, MEDIA o BAJA, y la probabilidad de caer en cada uno de esos rangos en un determinado mes depende sólo del nivel de la tasa el mes anterior. Dichas probabilidades quedan representadas en la siguiente matriz:

$$P = \begin{array}{c} \\ ALTA \\ MEDIA \\ BAJA \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & M & B \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \end{bmatrix} \end{array}$$

La experiencia indica que si la tasa es ALTA el saldo promedio de cada Cuenta Corriente es \$100.000, si la tasa es media es de \$200.000 y si la tasa es BAJA el saldo promedio de cada cuenta corriente es de \$300.000.

Además, si la tasa sube de BAJA a MEDIA Juan estima que el Stock de cuentas disminuirá en 100 cuentas, debido a que los clientes preferirán cerrar sus cuentas y colocar su dinero en depósitos. Si la tasa sube de MEDIA a ALTA Juan estima que el Stock de cuentas disminuirá en 120. Por el contrario, si la tasa baja los depósitos se verán desincentivados y el Stock de cuentas corrientes aumentará, siendo dicho aumento de 130 cuentas si el cambio es de MEDIA a BAJA y de 150 cuentas si el cambio es de ALTA a MEDIA.

a) Determine el valor esperado del saldo promedio para diciembre del próximo año. ¿En el largo plazo, cuál será el Saldo promedio en cuentas corrientes en el mes promedio?.

b) ¿Cuál es la variación esperada en el número de cuentas corrientes para el próximo año si a fines del año en curso la tasa es MEDIA?.

c) Juan desea conocer la variación esperada del Saldo Total de las Cuentas Corrientes, entendido como (Número de Cuentas × Saldo Promedio). ¿Cuánto vale ese indicador para el próximo año?.

6. Considere un problema de decisión markoviano con 3 estados (que denominaremos 1, 2 y 3). Todas las políticas estacionarias posibles dan origen a cadenas ergódicas. El problema de horizonte infinito fue resuelto y se sabe que existe un única política estacionaria óptima la cual denotaremos por B, definida como $B(1) = 2$, $B(2) = 4$ y $B(3) = 1$.

Después que el problema había sido resuelto se produjo un cambio en las condiciones del problema (por ejemplo cambiaron algunos precios). Interesa contestar 2 preguntas:

- ¿El cambio hace aumentar, disminuir o deja igual el beneficio esperado por transición en el largo plazo de la política B (g^B)?.
- ¿La política B sigue siendo necesariamente la óptima después del cambio?.

Conteste las preguntas anteriores para cada uno de los siguientes cambios. En lo que sigue $\hat{r_1}(a)$ denota el beneficio de un período de el estado i si la acción elegida es a.

a) $\hat{r_1}(1)$ es reemplazado por $\hat{r_1}(1) - 1$.

b) $\hat{r_i}(B(i))$ es reemplazado por $\hat{r_i}(B(i)) + 1\,\forall\, i$.

c) $\hat{r_1}(2)$ es reemplazado por $\hat{r_1}(2) + 1$.

7. Suponga que Ud. es el encargado de planificación de la producción en la empresa Y, la cual fabrica y vende el producto X.

   La demanda por el producto X en una semana dada puede tomar sólo dos valores: 0 ó 1 [unidades]. El comportamiento de la demanda es susceptible de ser modelado como una cadena de Markov: la probabilidad que la demanda sea igual a 1 en una semana dada es α si la demanda fue 1 la semana anterior y β si la demanda fue 0 la semana anterior, independiente de lo que haya ocurrido 2 o más semanas antes.

   El precio venta de una unidad de X es de A[\$] y el costo variable de producción es de C[\$] ($A > C$). Cada semana se puede fabricar a lo más 1 unidad de X. Además, cada vez que se inicia un ciclo productivo (entendido como una secuencia de semanas en todas las cuales se produce) se incurre en un costo de setup S[\$] ($S > 0$). A modo de ejemplo: si se produce X durante 4 semanas seguidas el costo de producción total es $4C + S$, mientras que si se produce durante 2 semanas, luego se detiene la producción una semana, y en seguida se produce durante 2 semanas más, el costo total de producción es $4C + 2S$.

   a) ¿Qué información es relevante para tomar la decisión de producir o no en una semana cualquiera?. Formule un modelo de decisión markoviano que permita tomar esa decisión (sólo la estructura de beneficios y las probabilidades de transición; no es necesario que plantee o resuelva el problema de optimización).

   b) ¿Qué forma toma una política estacionaria para este problema? (responda en términos del input y output de una política estacionaria). Dé un ejemplo de una política estacionaria (se agradece un mínimo de creatividad).

   c) ¿Qué indicador utilizaría para decir que una política estacionaria es mejor que otra?. Muestre que la política estacionaria "producir siempre" no es la óptima, argumentando que la siguiente política estacionaria es mejor que ella para algún valor de T: comenzar un ciclo productivo cada vez que el inventario caiga a 1 y continuar produciendo hasta que el inventario llegue a T. Si gusta apoye su argumento en el caso particular (y determinístico) en que $\alpha = 0$ y $\beta = 1$.

8. Un muelle privado tiene dos embarcaderos pero sólo una grúa. Durante la noche los barcos que desean cargar o descargar se comunican por radio con el muelle, y si es que hay un embarcadero disponible atracan ahí. En caso de no haber espacio, se van a otro muelle y nunca vuelven. La carga/descarga se realiza durante el día. Dado que se dispone de sólo una grúa, se puede atender a lo más un barco por día. Si hay más de uno el otro espera para ser atendido al día siguiente. Al caer la noche, el barco que fue atendido abandona el muelle dejando un embarcadero libre. El servicio de carga/descarga reporta un beneficio neto de B[\$/barco]. Tener un barco esperando faena significa un costo de E[\$/día], y se estima que por cada barco que no encuentra espacio para atracar se percibe un costo de C[\$/barco]. La probabilidad que durante la noche hayan i barcos deseando atracar en el muelle es p_i (con $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1$).

   a) Modele el estado del muelle al comienzo de cada día como una cadena de Markov en tiempo discreto.

   b) Justifique que la cadena anterior alcanza régimen estacionario y calcule el beneficio diario esperado en el largo plazo. Suponga que $B = 10$, $E = 1$, $C = 5$, $p_1 = p_2 = p_3 = 0{,}2$. Sea cuidadoso en identificar correctamente los valores de $\hat{r}_i$.

c) Suponga que ahora diariamente existe la posibilidad de arrendar una grúa extra a un costo de 5[$/día]. Visualice el problema como un modelo de decisión Markoviano. ¿Cuáles son las políticas estacionarias?. Sin hacer cálculos, descarte aquellas que obviamente no son óptimas. De las restantes, determine la óptima.

9. El asaltante de bancos internacional Brian Boitano alias Ultraman, ha concentrado sus atracos en tres países: A, B y C. Ultraman asalta sólo una vez por año y elige su próximo destino con igual probabilidad, sin repetirlo.

El departamento de policía de estos 3 países se han propuesto detener a Ultraman en el momento que intente ingresar o salir del país, pues una vez dentro del territorio la búsqueda es muy difícil. La siguiente tabla muestra la probabilidad que la policía de estos 3 países detenga al asaltante cuando éste intente atravesar la frontera.

País	*Probabilidad*
A	0,1
B	0,2
C	0,4

En promedio, un robo en un banco del país A le reporta un botín de 1000, un robo en B un botín de 3000 y uno en C un botín de 7000. El costo de transporte de un país a otro para Boitano se presenta en la siguiente tabla:

	A	B	C
A	0	500	1000
B	50	0	2000
C	1000	2000	0

En base a lo anterior y suponiendo que si la policía atrapa a Boitano, éste permanecerá eternamente en la cárcel, responda:

a) Construya un modelo que permita determinar en términos esperados el botín acumulado por Boitano en los próximos n años si acaba de ingresar en A sin ser descubierto. Determine el monto acumulado en los próximos 3 años?.

b) Si Ultraman acaba de Ingresar a B sin ser descubierto, en cuántos años esperaría usted que lo atrapen?.

10. (*) La empresa "Carter, Bienes y Servicios S.A." ha decidido iniciar un nuevo sistema de comercialización de sus productos, vendiéndolos a través de catálogos enviados por correo directamente a sus clientes. Actualmente la base de clientes de la compañía se encuentra en dividida en tres categorías de acuerdo a su comportamiento de compra.

Así, en la Categoría 1 estarán los clientes cuya última compra efectuada por el cliente fue el mes anterior, en la Categoría 2 si la última compra efectuada por el cliente fue dos meses atrás y en la Categoría 3 si la última compra efectuada por el cliente fue hace más de dos meses. De esta manera, cada vez que un cliente compra un producto pasa a la Categoría 1 y si no compra, aumenta su categoría en uno.

Actualmente la empresa. está enviando mensualmente catálogos a la mitad de sus clientes, los que son elegidos al azar. Luego de un tiempo de operación el gerente de marketing se ha dado cuenta que el comportamiento de compra de los clientes depende de su categoría y de si ha recibido o no el catálogo en el período (los catálogos son enviados al inicio de cada mes). Convencido de que su política de envíos está lejos de ser óptima ha recurrido a usted para que le indique cómo realizar el envío mensual de catálogos.

En lo que sigue le ayudaremos a definir, paso a paso, la política de envío de catálogos que debe aplicar esta empresa. La información que la empresa ha logrado reunir y que Ud. tiene a disposición para diseñar los envíos es la siguiente:

- $P_i(a)$= Probabilidad de que el cliente compre un producto si está en la Categoría i y se toma la acción a, $a \in \{S, N\}$ donde S = le mando un catálogo y N = no le mando catálogo.
- C= Costo de un catálogo (imprenta y correo).
- B= Beneficio neto asociado a una compra realizada por un cliente.

Para el resto de la pregunta considere que a la empresa le interesa definir sus acciones pensando en el largo plazo.

a) Encuentre los beneficios esperados asociados a cada estado, es decir, $\hat{r}_i(a)$ donde $a \in \{S, N\}$.

b) Modele el problema del comportamiento de compra (clasificación) de un cliente en particular como una Cadena de Markov con Decisiones, para una política de decisión estacionaria genérica. Explicite la matriz de probabilidades de transición.

c) Escriba explícitamente todas las políticas estacionarias que podría evaluar la empresa. Explique por qué en general el beneficio acumulado esperado no es adecuado para comparar estas políticas. ¿Cómo se realiza la evaluación en estos casos?.

d) Para los siguiente valores de las probabilidades de compra determine cuál de las siguientes políticas es más coveniente para la compañía.

$$\begin{array}{ccc} P_1(N) = 0,5 & P_2(N) = 0,2 & P_3(N) = 0 \\ P_1(S) = 0,8 & P_2(S) = 0,6 & P_3(S) = 0,2 \\ C = 100 & & B = 1000 \end{array}$$

- Envío de catálogos todos los meses a los clientes en las Categorías 1 y 2.
- Envío de catálogos durante todos los meses a los clientes en las Categorías 2 y 3.

11. (*) Suponga que usted trabaja en el Departamento de Marketing de una importante empresa cervecera y está encargado de decidir la política óptima de avisaje publicitario televisivo de esta compañía. Esto significa que usted debe decidir mes a mes, si contratar publicidad televisiva o si no hacerlo.

Las ventas mensuales de la empresa pueden ser altas, medianas o bajas y los beneficios asociados son 5, 3, 1 Millones US$ respectivamente. El costo de la publicidad televisiva alcanza los 2 Millones US$.

Existen probabilidades de pasar de un estado de ventas a otro mensualmente, que sólo dependen del estado actual. Además, estas probabilidades son distintas para el caso en se realiza la publicidad y para el que no se hace. Las siguientes matrices describen este comportamiento evolutivo:

Con Publicidad:

	A	M	B
A	0,5	0,3	0,2
M	0,4	0,4	0,2
B	0,4	0,6	0

Sin Publicidad:

	A	M	B
A	0,2	0,5	0,3
M	0,1	0,4	0,5
B	0	0,3	0,7

a) Para cada acción, modele el problema como una Cadena de Markov con beneficios.

b) Resuelva el problema utilizando Markov con decisiones, para el caso de horizonte finito de K períodos. Suponga que los valores residuales son 3, 1, -1 Millones US $ para los estados Alta, Media, Baja, respectivamente.

c) Resuelva el problema utilizando Markov con decisiones, para el caso de horizonte infinito.

12. (*) Un prestigioso técnico nacional, más conocido como *El Ingeniero*, le ha pedido su asesoría para estimar cuántos puntos obtendrá en el presente Torneo de Apertura del Fútbol argentino.

Supondremos que los resultados de cada partido que juega su equipo se pueden modelar como una cadena de Markov, es decir, el resultado del próximo partido depende del último resultado obtenido. A partir de datos históricos se ha estimado la siguiente matriz de transición:

$$P = \begin{array}{c|ccc|} & g & e & p \\ \hline g & 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ e & 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ p & 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \end{array}$$

Se sabe que por cada partido ganado se obtienen tres puntos, si se empata obtiene un punto y si pierde no obtiene puntos. Se han jugado 2 partidos hasta ahora y lleva sólo un punto. Además el último resultado obtenido fue un empate y según el técnico estos resultados no afectarán el rendimiento futuro de sus dirigidos.

a) Construya un modelo de Markov con Beneficios que le permita estimar el valor esperado de los puntos que obtendrá el equipo del *Ingeniero* en el campeonato de Apertura, si el primer partido de los que le resta por jugar se gana. Suponga que restan 16 partidos y recuerde que ya tiene un punto.

$$P^{16} = \begin{vmatrix} 0{,}42 & 0{,}36 & 0{,}22 \\ 0{,}42 & 0{,}36 & 0{,}22 \\ 0{,}42 & 0{,}36 & 0{,}22 \end{vmatrix}$$

b) Suponiendo que el último partido jugado (el cual fue empatado) si afectará el rendimiento futuro del equipo, de la manera descrita por matriz P, ¿cúal es el valor esperado de los puntos que obtendrá en el Torneo?.

Independiente de las partes anteriores, suponga ahora que la carrera del técnico chileno también puede ser modelada como una Cadena de Markov. Actualmente *El Ingeniero* es conocido sólo a nivel Latinoamericano, sin embargo cada temporada existe una probabilidad q=0.2, de que sea tentado por un equipo de la Liga Italiana, con lo que pasaría a ser conocido a nivel Europeo. Una vez en la Liga Italiana con probabilidad r=0.3 el D.T no saldrá campeón con su equipo por lo que seguirá siendo conocido sólo a Nivel Europeo, pero con probabilidad $1 - r$ será Campeón de Liga pasando a formar parte de la elite de técnicos famosos mundialmente, nivel del que nunca dejará de pertenecer.

c) Calcule el número esperado de temporadas que tardará el entrenador chileno en alcanzar la fama a nivel Mundial.

13. (*) En un laboratorio existe un sofisticado equipo electrónico con 2 componentes, las que llamaremos A y B, las que pueden estar *encendidas* (ON) o *apagadas* (OFF). Para que este equipo funcione correctamente es necesario que una y sólo una de las componentes se encuentre encendida (si se encienden

ambas se produce un alza de voltaje que destruye el equipo, mientras que si ambas están apagadas el sistema suspende sus actividades definitivamente).

El comportamiento de *encendido* y *apagado* es aleatorio e independiente para ambas componentes, pudiendo cambiar al comienzo de cada día. Estos, sólo han podido determinar las probabilidades de transición entre estos estados para ambas componentes, los que se muestran a continuación:

Componente A

	ON	OFF
ON	0.4	0.6
OFF	0.6	0.4

Componente B

	ON	OFF
ON	0.3	0.7
OFF	0.7	0.3

a) Modele el estado del equipo como una Cadena de Markov de tiempo discreto. Determine si existen probabilidades de estado estacionario y escriba la matriz de transición de un período.

b) Si la componente A está actualmente en ON y la componente B en OFF, ¿Cuál será la duración esperada del equipo antes de fallar?.

Suponga ahora que cada vez que el equipo deja de funcionar porque ambas componentes se encuentran encendidas se incurre en un costo de C [$] porque hay que realizar reparaciones mayores producto del alza de voltaje. Estas reparaciones demoran exactamente dos días (el día en que falla y uno adicional), luego de los cuales la máquina comenzará a operar con la componente A en ON y la B en OFF.

Sin embargo, si el equipo ha dejado de funcionar porque ambas componentes están en OFF el encargado del laboratorio al inicio del día siguiente interviene y pone en ON a la componente A, incurriendo en un costo k [$] con $k < C$ asociados a no tener el equipo funcionando un día.

En esta situación conteste las siguientes preguntas:

c) Modele la nueva situación como una cadena de Markov en tiempo discreto. Determine las probabilidades de transición de un período.

d) ¿Cuál es la fracción del tiempo en el largo plazo que la máquina no estará operativa?. ¿Cuál es el costo promedio diario en el largo plazo de mantener el equipo operando?.

14. (*) El Departamento de Cobranza de una empresa de telefonía fija ha decidido implementar un nuevo procedimiento de cobranza sobre su cartera de clientes. Con este fin ha dividido su base de clientes en tres categorías:

- *Clientes al Día*: Clientes sin deudas, que cada período pagan una cuenta de I [$].
- *Clientes Morosos Nivel 1*: Clientes que tienen 1 mes de morosidad.
- *Clientes Morosos Nivel 2*: Clientes que tienen más de un mes de morosidad.

La tasa de interés mensual simple por morosidad es de un 10 %. Además, se sabe que a los clientes morosos se les interrumpe el servicio por lo que su deuda sólo puede aumentar producto de los intereses.

El departamento sabe que el pago de una deuda dependerá tanto de las acciones que se tomen como de la antigüedad de la misma. Sabe que un cliente sin deuda dejará de pagar su cuenta con probabilidad q, independiente de cualquier cosa.

Para los clientes con 1 mes de retraso se puede enviar un *aviso de cobranza* con el objetivo de recordar el pago. Realizar este aviso tiene un costo de N [$], y mediante esta acción una fracción p_s de los clientes pagará su deuda. Por otra parte, si estos clientes no reciben el aviso, la probabilidad de pagar es p_n, con $p_s > p_n$.

Para los clientes con más de 1 mes de retraso se tiene la opción de llegar a un *acuerdo* en cuyo caso la empresa recibirá una fracción aleatoriamente distribuida entre $[0, 1]$ del total de la deuda ($I+$ intereses), y repondrá el servicio al cliente (los clientes pasan de esta manera a la categoría *al día*). La segunda alternativa para conseguir el pago es demandar al cliente. El costo de estar en el juicio es de c [$] por cada mes. Además se sabe que el juicio finaliza con probabilidad $(1-r)$ al final de un mes independiente de cuántos meses se haya estado en el pleito. Cuando el juicio termina la empresa siempre recibe el total de la deuda (nuevamente $I+$ intereses).

La empresa está interesada en maximizar los ingresos esperados por cliente en el largo plazo.

a) ¿Cuáles son las políticas estacionarias para la empresa de telefonía?. Lístelas.

b) Dibuje la(s) cadena(s) de Markov asociadas a cada política estacionaria, explicitando las probabilidades de transición. Argumente la existencia de probabilidades estacionarias para cada caso.

c) Suponiendo conocidas TODAS las probabilidades estacionarias de la parte anterior, ¿Cómo encontraría la política óptima para esta empresa?. Explicite las ecuaciones que permitirían tomar la decisión, en términos de las probabilidades estacionarias y los parámetros del problema.

15. Armijo Catalán se encuentra en una difícil situación. Camino a su casa es abordado por un conjunto de delincuentes que desean robarle sus preciadas pertenencias. Sin embargo Armijo, un hombre previsor y mentalmente desequilibrado, se encuentra preparado para enfrentar esta situación y sin dudarlo desenfunda su arma automática de colección (Armijo sufre de delirio de persecución).

    Debido a la situación las manos de Armijo no responden fielmente a su voluntad y cada vez que trata de disparar sus manos temblorosas dejan salir una ráfaga de 1, 2 o 3 balas con probabilidades p, q, y r, respectivamente ($p+q+r=1$). Armijo, no tan previsor, cuenta con un único cargador de N balas.

    a) Armijo desearía saber cuál es el número esperado de disparos (ráfagas) que alcanzará a hacer antes de que se le acaben las balas. Modelando el problema como una cadena de Markov explique cómo obtener la respuesta.

    Suponga que Armijo se enfrenta a R enemigos y el único medio de defensa que tiene es el antes descrito, pudiendo disparar contra sólo 1 de los delincuentes con cada ráfaga de la pistola. Se sabe que si Armijo se queda sin balas antes de matar a todos los delincuentes, éstos le darán muerte, mientras que saldrá victorioso de la situación si los mata a todos antes de terminar sus N balas. La probabilidad que una ráfaga de i balas impacte al delincuente al que Armijo disparó es de P_i.

    b) Describa la evolución de esta situación utilizando una cadena de Markov en tiempo discreto. Determine las probabilidades de una etapa, clasifique y caracterice los estados. ¿Existirán probabilidades estacionarias?.
    <u>Hint:</u> No necesita dibujar toda la cadena sino remitirse a los casos interesantes.

    c) ¿Cuál es la probabilidad que nuestro mentalmente perturbado héroe muera durante el enfrentamiento con los delincuentes comunes?. Suponga $N=3$ y $R=2$.

16. Un estudiante de industrias está analizando la posibilidad de invitar a una amiga a una fiesta. Los inconvenientes radican en que el estudiante no cuenta con gran presupuesto, por lo que ha decidido ocupar sus conocimientos acerca de las cadenas de Markov para determinar cuál es el costo esperado de esta cita. La experiencia del estudiante en esta clase de incursiones le ha enseñado ciertas lecciones que utilizará para este propósito. Según ésta, el transcurso de la fiesta puede ser modelado de la siguiente forma: al comienzo de la cita el deberá comprar un trago a su pareja, por un valor unitario de $2.000 (compra dos cada vez). Cuando finalizan de tomar sus tragos, con probabilidad 0,2 tendrá que comprar nuevamente tragos para él y su pareja. Con una probabilidad de 0,1 su pareja se irá a bailar con otro tipo. Finalmente con una probabilidad de 0,7 él y su pareja se dirigirán a la pista de baile a lucir sus dotes artísticas. Sin embargo esto presenta una nueva disyuntiva para nuestro atribulado estudiante: cada vez que baila una canción incurre en un costo de $1.000, el cual se asocia al riesgo moral de hacer el completo ridículo (su forma de bailar es una ofensa para los espectadores). Cada vez que nuestra

pareja termina de bailar una canción, con probabilidad 0,05 regresan al bar y compran nuevamente tragos (mejor tomar que hacer el ridículo). Con probabilidad 0,1 bailarán la próxima canción. Con probabilidad 0,05 su amiga se retirará indignada y comenzará a bailar con otro tipo, desconociendo por completo a nuestro bailarín. Finalmente, con probabilidad 0,8 nuestra romántica pareja se retirará a un mirador capitalino a proseguir su aventura, lo que le reportará una utilidad de \$10.000, por concepto de autoestima y satisfacción personal. Considere, que cada vez que la amiga del estudiante lo desprecia, debe incurrir en un costo de \$300 para tomar locomoción (ella manejaba).

a) Modele la situación planteada como una cadena de Markov en tiempo discreto, identifique las clases de la cadena y clasifique los estados como transientes o recurrentes.

b) Calcule el beneficio esperado de la cita de nuestro amigo, considerando que la entrada a la fiesta es de X [\$] por persona. Exprese su resultado en términos de los f_{ij} (probabilidad de visitar j, partiendo de i) y los m_{ij} (número esperado de visitas a j, partiendo de i). ¿Cuánto es lo máximo que el alumno debería pagar por entrar a la fiesta?.

c) Calcule numéricamente los valores de f_{ij} y m_{ij} y reemplácelos en la expresión obtenida en b). ¿Le aconsejaría usted al estudiante asistir a la cita?.

2. Resolución Cadenas de Markov con Beneficios y Decisiones

■ **10.** *a)* Lo que se pide calcular es el vector $\overrightarrow{\widehat{r}}$ para cada una de las políticas de acción. Sea:

$$
\begin{aligned}
S_i^n &= \text{enviar catálogo a cliente de categoría i cuando quedan n periodos} \\
N_i^n &= \text{enviar catálogo a cliente de categoría i cuando quedan n periodos}
\end{aligned}
$$

Entonces cualquier política de decisión (ya sea de corto o largo plazo) puede ser descrita según las definiciones realizadas. En particular cuando se trata de una política de largo plazo, el subíndice asociado al período pierde significancia. entonces cualquier política podrá ser descrita por:

$$
\begin{aligned}
S_i &= \text{enviar catálogo a cliente de categoría i} \\
N_i &= \text{enviar catálogo a cliente de categoría i}
\end{aligned}
$$

De esta forma se tiene que:

$$
\begin{aligned}
\widehat{r}_i(N_i) &= B \cdot P_i(N_i) \\
\widehat{r}_i(S_i) &= -C + B \cdot P_i(S_i)
\end{aligned}
$$

b) El comportamiento del consumidor puede ser representado por una cadena de Markov tal que los estados representan la categoría en que se encuentra clasificado un cliente. El grafo asociado se aprecia en la figura.

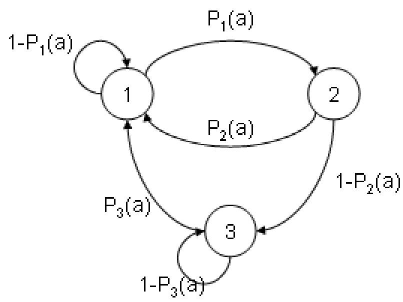

Figura 1: Cadena problema 10-1

La matriz de transición es (para una política estacionaria dada):

$$
\begin{vmatrix}
P_1(a_1) & 1-P_1(a_1) & 0 \\
P_2(a_2) & 0 & 1-P_2(a_2) \\
P_3(a_3) & 0 & 1-P_3(a_3)
\end{vmatrix}
$$

c) Las políticas posibles son $2^3 = 8$:

$$(a_1, a_2, a_3) = \begin{cases} S & S & S \\ S & S & N \\ S & N & S \\ S & N & N \\ N & S & S \\ N & S & N \\ N & N & S \\ N & N & S \end{cases}$$

Donde, por ejemplo, la política (N, S, S) es No enviar catálogo a los clientes de la categoría 1, enviar a los de la segunda y la tercera.

Adicionalmente se tiene que el criterio del valor acumulado no es práctico debido principalmente a que en el largo plazo (n muy grande) los beneficios pueden divergir para más de una política. Qué criterio es aplicable?: El criterio de ganancia por período promedio (esperada) en el largo plazo (es decir cálculo del escalar $\boldsymbol{g}$)

d) En ambos casos se deben de calcular los vectores de probabilidades estacionarias. Las cadenas correspondientes a las políticas 1 y 2 se muestran, respectivamente, en las figuras 2 y 3.

- En el caso de la política uno es claro que, dado que existe un único estado en la única clase recurrente, la probabilidad estacionaria de este estado (categoría 3) es 1 (entonces la del resto es 0). Claramente en este caso $\boldsymbol{g}$=0. La cadena se muestra en la figura.

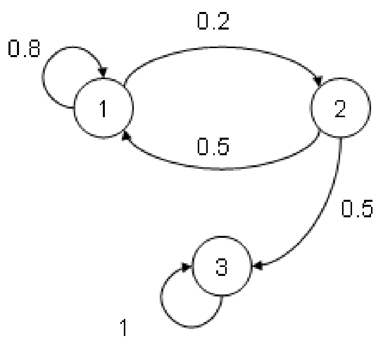

Figura 2: Cadena 10-2

- En este caso existe una única clase recurrente compuesta por todos los estados. Entonces es necesario resolver el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}6 & 0 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

La solución a este sistema es:

$$\begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

El vector $\overrightarrow{\widehat{r}}$ toma los siguientes valores:

$$\begin{pmatrix} \widehat{r}_1 \\ \widehat{r}_2 \\ \widehat{r}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 \cdot 0{,}5 \\ 1000 \cdot 0{,}5 - 100 \\ 1000 \cdot 0{,}2 - 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 400 \\ 100 \end{pmatrix}$$

De esta forma se tiene que $\boldsymbol{g}= 200 + 80 + 40 = 320$
Entonces claramente se prefiere la política 2. Ésta se muestra en la figura.

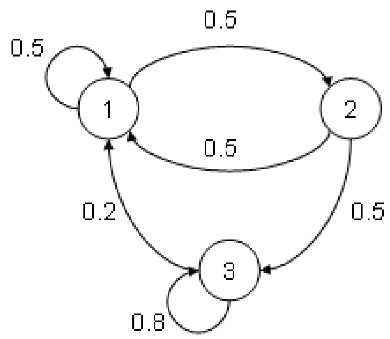

Figura 3: Cadena problema 10-3

■ **11.** *a*) La cadena queda se muestra en la figura.

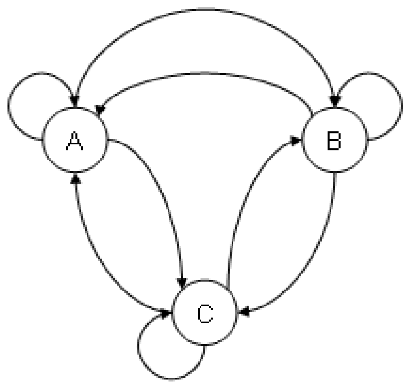

Figura 4: Cadena problema 11-1

Las políticas de decisión pueden ser especificadas como combinaciones de las políticas puras de publicidad y no publicidad. Sólo basta con especificar las matrices de trancisión para estas últimas (ver el enunciado).
Respecto a los beneficios asociados a las políticas estos serán:

$$r^{Sin} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad y \qquad r^{Pub} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

b) Esto no es más que resolver una programación dinámica donde el estado son las ventas y las decisiones son hacer o no publicidad. Esto queda de la siguiente forma (ojo, que el número de estados es 3 por lo que podemos especificar la función de beneficios para cada uno):

`Etapa 0` (contando desde el final hacia atrás):

$$V(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

`Etapa k:`

$$V_A(k) = \text{máx}\left\{3 + \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_A(k-1) \\ V_M(k-1) \\ V_B(k-1) \end{pmatrix}, 5 + \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_A(k-1) \\ V_M(k-1) \\ V_B(k-1) \end{pmatrix} \right\}$$

$$V_M(k) = \text{máx}\left\{1 + \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_A(k-1) \\ V_M(k-1) \\ V_B(k-1) \end{pmatrix}, 3 + \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_A(k-1) \\ V_M(k-1) \\ V_B(k-1) \end{pmatrix} \right\}$$

$$V_B(k) = \text{máx}\left\{-1 + \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 & 0{,}0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_A(k-1) \\ V_M(k-1) \\ V_B(k-1) \end{pmatrix}, 1 + \begin{pmatrix} 0{,}0 & 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_A(k-1) \\ V_M(k-1) \\ V_B(k-1) \end{pmatrix} \right\}$$

c) Utilizaremos el algoritmo de Howard:

$$\overline{S} = \begin{pmatrix} A \to Sin \\ M \to Sin \\ B \to Pub \end{pmatrix}$$

La matriz asociada a esta política es la siguiente:

$$\overline{M} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}6 & 0{,}0 \end{pmatrix} \qquad y \qquad \overline{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos el vector $\overline{W}$:

$$\overline{W} + g \cdot \overrightarrow{e} = \overline{r} + \overline{M} \cdot \overline{W}$$

Desde $\Pi = \Pi \cdot \overline{M}$ y $\sum_i \Pi_i = 1$ tenemos que:

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0{,}22 \\ 0{,}48 \\ 0{,}30 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$g = \sum_i \Pi_i \cdot \overline{r}_i = 2{,}2$$

Por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
(I-\overline{M})\overline{W} &= \overline{r} - g\cdot e \\
\begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}5 & -0{,}3 \\ -0{,}1 & 0{,}6 & -0{,}5 \\ -0{,}4 & -0{,}6 & 1{,}0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} W_A \\ W_M \\ W_B \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2{,}79 \\ 0{,}79 \\ -3{,}2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} W_A = 5{,}2 \\ W_M = 2{,}4 \\ W_B = 0{,}0 \end{matrix}
\end{aligned}
$$

Ahora debemos construir la próxima política estacionaria.

$$
S(A) = \begin{cases} 5 + \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5{,}2 \\ 2{,}4 \\ 0 \end{pmatrix} = 7{,}2 \\ 3 + \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5{,}2 \\ 2{,}4 \\ 0 \end{pmatrix} = 6{,}34 \end{cases} \Rightarrow Sin
$$

$$
S(M) = \begin{cases} 3 + \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5{,}2 \\ 2{,}4 \\ 0 \end{pmatrix} = 4{,}5 \\ 1 + \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5{,}2 \\ 2{,}4 \\ 0 \end{pmatrix} = 4{,}06 \end{cases} \Rightarrow Sin
$$

$$
S(B) = \begin{cases} 1 + \begin{pmatrix} 0{,}0 & 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5{,}2 \\ 2{,}4 \\ 0 \end{pmatrix} = 1{,}7 \\ -1 + \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 & 0{,}0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5{,}2 \\ 2{,}4 \\ 0 \end{pmatrix} = 2{,}5 \end{cases} \Rightarrow Pub
$$

Pero hemos reconstruido la política $\overline{S} \Rightarrow \overline{S}$ es la política óptima.

■ **12.** Antes de responder las preguntas debemos determinar la estructura de la cadena. Los estados serán el resultado del partido de la semana. La cadena asociada se muestra en la figura.

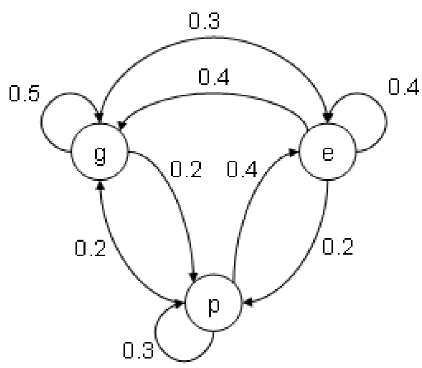

Figura 5: Cadena problema 12-1

a) La pregunta va orientada a definir una estructura de costos y ocupar las formulas de Markov con beneficios. Para esto definimos la siguiente estructura:

$$r_g = 3 \qquad r_e = 1 \qquad r_p = 0 \qquad r_{ij} = 0 \quad \forall i, j$$

Esto implica que:

$$\widehat{r}_g = 3 \qquad \widehat{r}_e = 1 \qquad \widehat{r}_p = 0$$

Adicionalmente necesitaremos los valores de las probabilidades estacionarias (existirán dado que se trata de una cadena irreductible de una clase recurrente aperiódica). Sin embargo si observamos P^{16}(en el enunciado) vemos que todas las filas son iguales por lo que podemos argumentar que ya convergió a su forma de estado estacionario, por lo que se puede decir que:

$$\pi_g = 0{,}42 \qquad \pi_e = 0{,}36 \qquad \pi_p = 0{,}22$$

De esta forma tendremos que

$$g = 3 \cdot 0{,}42 + 1 \cdot 0{,}36 = 1{,}62$$

Ahora debemos encontrar el valor de $\overrightarrow{W}$, que satisface:

$$\overrightarrow{W} + \begin{pmatrix} 1{,}62 \\ 1{,}62 \\ 1{,}62 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{W}$$

Imponiendo que $W_p = 0$ se tiene que:

$$\overrightarrow{W} = \begin{pmatrix} 3{,}5\overline{6} \\ 1{,}3\overline{4} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces calculamos cuántos puntos se acumularán en 16 partidos (los restantes) si parto en el estado g:

$$\overrightarrow{v}(16) = 16 \cdot \begin{pmatrix} 1{,}62 \\ 1{,}62 \\ 1{,}62 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3{,}5\overline{6} \\ 1{,}3\overline{4} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}42 & 0{,}36 & 0{,}22 \\ 0{,}42 & 0{,}36 & 0{,}22 \\ 0{,}42 & 0{,}36 & 0{,}22 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3{,}5\overline{6} \\ 1{,}3\overline{4} \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

En particular nos interesa conocer $V_g(16)$. Esto es:

$$V_g(16) = 25{,}92 + 3{,}5\overline{6} + 0{,}42 \cdot 0{,}5\overline{6} - 0{,}36 \cdot 0{,}3\overline{4} \approx 30{,}1792$$

Entonces, si considero que ya llevaba un punto ganado, entonces espero juntar 31,1792 puntos en lo que queda de campeonato.

b) Ahora me preguntan por los puntos acumulados desde un partido empatado hasta 17 fechas más. Para calcular esto no debo cambiar la estructura de beneficios por lo que el W será el mismo de la parte anterior. También puedo asumir que $P^{16} = P^{17}$. Es por esto que tendremos que:

$$\overrightarrow{v}(17) = 17 \cdot \begin{pmatrix} 1{,}62 \\ 1{,}62 \\ 1{,}62 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3{,}5\overline{6} \\ 1{,}3\overline{4} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}42 & 0{,}36 & 0{,}22 \\ 0{,}42 & 0{,}36 & 0{,}22 \\ 0{,}42 & 0{,}36 & 0{,}22 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3{,}5\overline{6} \\ 1{,}3\overline{4} \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

En particular:

$$V_e(17) = 27{,}54 + 1{,}3\overline{4} + 0{,}42 \cdot 0{,}5\overline{6} - 0{,}36 \cdot 0{,}3\overline{4} \approx 29{,}572$$

que es lo que nos están pidiendo calcular (en este caso no sumo un punto adicional)

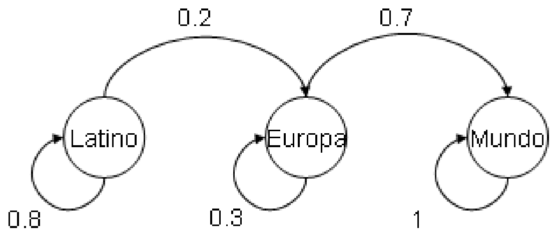

Figura 6: Cadena problema 12-2

c) Si modelamos el estado de la carrera del técnico tendremos que la cadena asociada es la que se muestra el la figura.

Entonces, sólo debemos calcular w_{latino} utilizando las siguiente estructura de costos:

$$r_{latino} = r_{europa} = 1 \qquad r_{mundo} = 0 \qquad y \quad r_{ij} = 0 \quad \forall i, j$$

Entonces $\overrightarrow{W}$ debe cumplir con:

$$\overrightarrow{W} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{W}$$

Si imponemos $W_{mundo} = 0$ tendremos que la segunda ecuación es:

$$W_{europa} = 1 + 0{,}3 \cdot W_{europa} \quad \Rightarrow \quad W_{europa} = \frac{10}{7}$$

Remplazando en la primera ecuación tendremos que:

$$W_{latino} = 6{,}42$$

Que es exactamente el número esperado de temporadas que tardará el entrenador chileno en alcanzar la fama a nivel Mundial.

■ **13.** *a*) Existen dos posibles interpretaciones para el estado de falla del sistema: Cuando éste llegaba a los estados ON-ON ó OFF-OFF, o cuando llegaba al estado ON-ON. Para la primera de las interpretaciones el desarrollo es mucho más fácil, puesto que limitamos el número de estados transcientes, lo que simplifica los cálculos. Los desarrollos en los distintos casos son los siguientes:

- Caso ON-ON ó OFF-OFF $\Rightarrow$ FALLA:
  Para calcular las probabilidades de transición es necesario ver qué eventos son los necesarios para tener cada una de las transiciones. Por ejemplo, para pasar del estado ON-OFF al estado OFF-ON es necesario que la componente A se apague y la componente B se encienda, lo que ocurre con una probabilidad $P_{\text{ON-OFF; OFF-ON}} = 0,6 \cdot 0,7 = \frac{21}{50}$. La matriz de transición resultante, siguiendo el mismo tipo de razonamiento es:

P=

	ON-OFF	OFF-ON	Mala
ON-OFF	$0,4 \cdot 0,3$	$0,6 \cdot 0,7$	$0,4 \cdot 0,7 + 0,6 \cdot 0,3$
OFF-ON	$0,6 \cdot 0,7$	$0,4 \cdot 0,3$	$0,4 \cdot 0,7 + 0,6 \cdot 0,3$
Mala	0	0	1

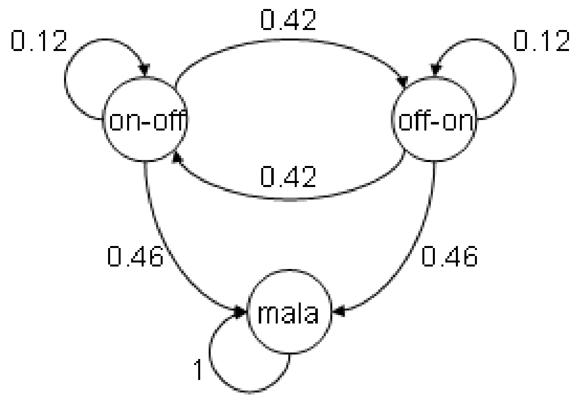

Figura 7: Cadena problema 13-1

La cadena resultante es la que se muestra en la figura.
Además, podemos ver claramente que existe una única clase recurrente (la del estado "Mala"), mientras que los otros 2 estados pertenecen a una clase transiente. Así existirá una ley de probabilidades estacionarias que estará dada por: $\Pi = [0\ 0\ 1]$.

- Caso ON-ON $\Rightarrow$ FALLA:
  Análogamente al caso anterior la matriz de transiciones será la siguiente:

P=		ON-OFF	OFF-ON	OFF-OFF	Mala
	ON-OFF	$0,4 \cdot 0,3$	$0,6 \cdot 0,7$	$0,6 \cdot 0,3$	$0,4 \cdot 0,7$
	OFF-ON	$0,6 \cdot 0,7$	$0,4 \cdot 0,3$	$0,4 \cdot 0,7$	$0,6 \cdot 0,3$
	OFF-OFF	$0,6 \cdot 0,3$	$0,4 \cdot 0,7$	$0,4 \cdot 0,3$	$0,6 \cdot 0,7$
	Mala	0	0	0	1

  La cadena resultante es la que se muestra en la figura.

b) Utilizaremos las herramientas de Markov con Beneficios para calcular el tiempo esperado en el transiente. De esta manera, calcular el $\lim_{n\to\infty} V(n)$ se limita a encontrar el vector de relativos asintótico W y elegir la componente asociada al estado ON-OFF.

- Caso ON-ON o OFF-OFF $\Rightarrow$ FALLA:
  De esta manera tendremos que resolver:

$$W_T = \begin{bmatrix} \frac{44}{50} & \frac{-21}{50} \\ \frac{-21}{50} & \frac{44}{50} \end{bmatrix}^{-1} \cdot e_T$$

  Para resolver este sistema NO se necesita invertir la matriz, si nos damos cuenta que comenzar en ON-OFF es equivalente a empezar en OFF-ON porque la situación es simétrica. Si multiplicamos por la matriz P_T debemos calcular:

$$\begin{bmatrix} \frac{44}{50} & \frac{-21}{50} \\ \frac{-21}{50} & \frac{44}{50} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{Así, } x = \frac{50}{23}$$

  Podemos ver que el tiempo esperado antes de que la máquina falle será $\frac{50}{23}$.

- Caso ON-ON $\Rightarrow$ FALLA:
  Nuevamente tendremos que resolver el siguiente sistema:

$$W_T = \Big[I - P_{TT} \Big]^{-1} \cdot e_T$$

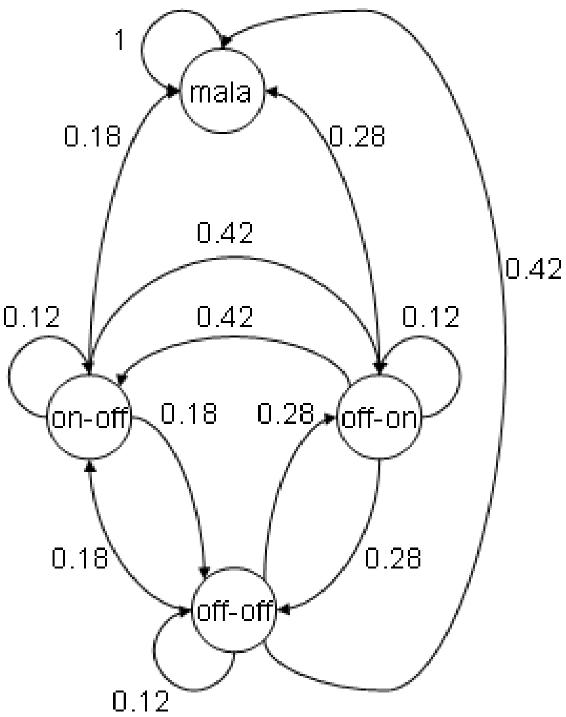

Figura 8: Cadena problema 13-2

Donde P_{TT} es la submatriz de transición entre estados transientes. En este caso TAMPOCO es necesario invertir la matriz, y sólo es necesario resolver un sistema de 2x2 utilizando el mismo argumento de simetría de la parte anterior. As:

$$\begin{bmatrix} 1-0,12 & -0,42 & -0,18 \\ -0,42 & 1-0,12 & -0,28 \\ -0,18 & -0{,}28 & 1-0,12 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ocupando la primera y tercera ecuación, se tiene que $y = \frac{10}{7}$ por lo que el tiempo esperado antes de fallar x será igual a

$$x = \frac{1 + 0,18 \cdot \frac{10}{7}}{0,46} = \frac{59}{23}$$

c) En esta parte es necesario separar el motivo por el cual falla la máquina, además de introducir un estado que indique que la máquina está siendo reparada. Por esto bajo ambas interpretaciones, los desarrollos son los mismos. La matriz de transiciones en 1 etapa queda bien representada por:

P=

	ON-OFF	OFF-ON	OFF-OFF	ON-ON	Rep
ON-OFF	$0,4 \cdot 0,3$	$0,6 \cdot 0,7$	$0,4 \cdot 0,7$	$0,6 \cdot 0,3$	0
OFF-ON	$0,6 \cdot 0,7$	$0,4 \cdot 0,3$	$0,6 \cdot 0,3$	$0,4 \cdot 0,7$	0
OFF-OFF	1	0	0	0	0
ON-ON	0	0	0	0	1
Rep	1	0	0	0	0

La cadena se muestra en la figura.

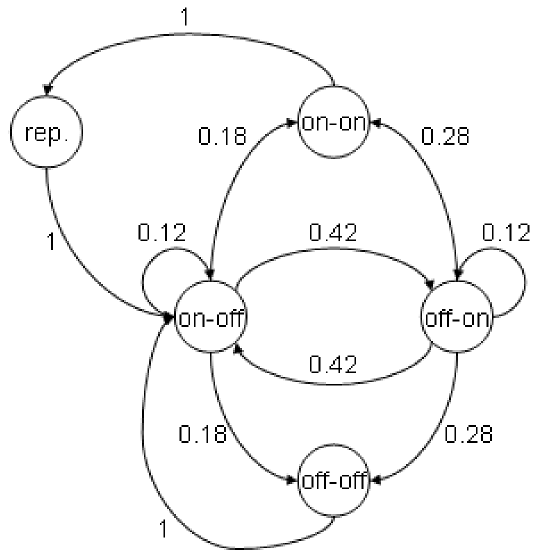

Figura 9: Cadena problema 13-3

Podemos ver que existe una única clase recurrente aperiódica (formada por todos los estados), por lo que existirá una ley de probabilidades estacionarias.

d) No estará operando una fracción $\pi_{\text{OFF-OFF}} + \pi_{\text{ON-ON}} + \pi_{\text{Rep}}$
Para calcular este valor es necesario resolver el sistema $\Pi = \Pi \cdot P$. Vamos a dejar todo en función de $\pi_{\text{ON-OFF}}$. Se tiene que:
$\pi_{\text{OFF-ON}} = \frac{23}{50} \cdot \pi_{\text{ON-OFF}}$
$\pi_{\text{OFF-OFF}} = \pi_{\text{ON-ON}} = \pi_{\text{Rep}} = \frac{231}{50} \cdot \pi_{\text{ON-OFF}}$

$\pi_{\text{ON-OFF}}(1 + \frac{23}{50} + 3 \cdot \frac{231}{50}) = 1$ donde se tiene que $\pi_{\text{ON-OFF}} = \frac{50}{766}$
De esta manera, la fracción del tiempo que no estará operativo será $\frac{693}{766}$.
Para calcular el costo esperado de un período en el largo plazo hay que limitarse a calcular g. Así se tendrá $g = C \cdot \pi_{\text{OFF-OFF}} + k \cdot \pi_{\text{ON-ON}}$

■ **14.** *a*) Las políticas estacionarias para la empresa telefónica serían:

- Enviar un aviso de cobranza a los clientes con un mes de retraso y llegar a acuerdo con los clientes con más de un mes de retraso.
- Enviar un aviso de cobranza a los clientes con un mes de retraso y demandar a los clientes con más de un mes de retraso.
- NO enviar un aviso a los clientes con un mes de retraso y llegar a acuerdo con los clientes con más de un mes de retraso.
- NO enviar un aviso a los clientes con un mes de retraso y demandar a los clientes con más de un mes de retraso.

b) Las Cadenas de Markov asociadas a cada una de las políticas estacionarias descritas anteriormente son las siguientes:

- Enviar aviso y llegar a acuerdo. La cadena se muestra en la figura.
- Enviar aviso y demandar. La figura se muestra en la figura.

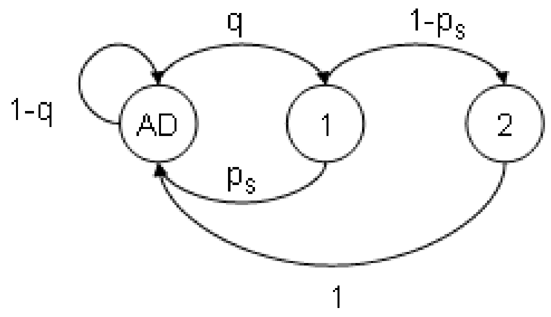

Figura 10: Cadena problema 14-1

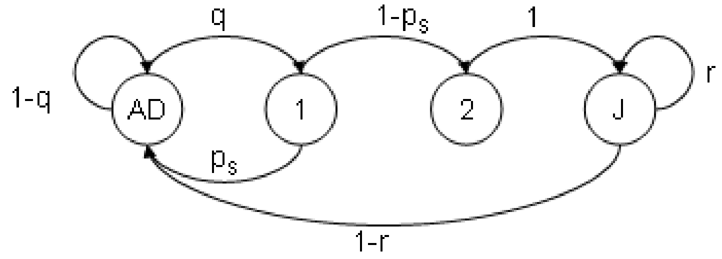

Figura 11: Cadena problema 14-2

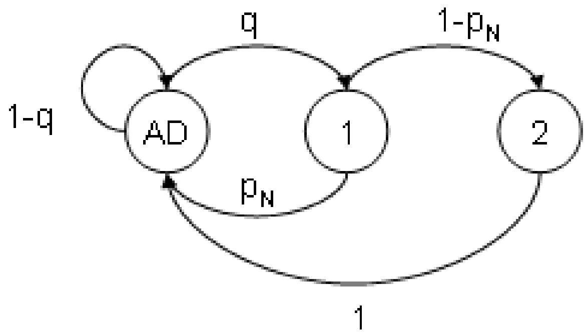

Figura 12: Cadena problema 14-3

- NO enviar aviso y llegar a acuerdo. La cadena se muestra en la figura.
- NO enviar aviso y demandar. La cadena se muestra en la figura.

En todos los casos las cadenas están formadas por una única clase recurrente que es aperiódica (ergódicas), por lo tanto existen probabilidades estacionarias.

c) Primero se deben calcular los beneficios esperados asociados a las transiciones desde cada estado:

$$\hat{r}_i = r_i + \sum_j P_{ij} r_{ij}$$

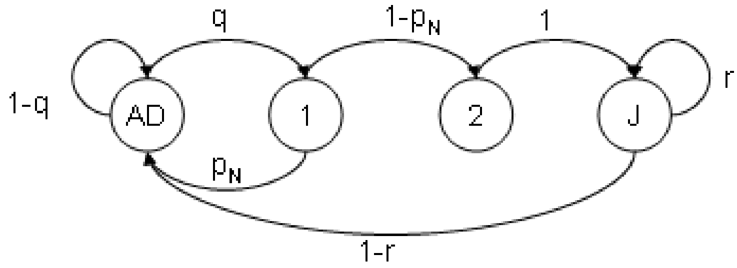

Figura 13: Cadena 14-4

$$
\begin{aligned}
\hat{r}_{AD} &= 0 + P_{AD,AD} \cdot I + P_{AD,1} \cdot 0 \\
&= (1-q) \cdot I \\
\hat{r}_1(S) &= -N + P_{1,AD}(S) \cdot 1,1 \cdot I + P_{1,2} \cdot 0 \\
&= -N + p_S \cdot 1,1 \cdot I \\
\hat{r}_1(N) &= 0 + P_{1,AD}(N) \cdot 1,1 \cdot I + P_{1,2} \cdot 0 \\
&= p_N \cdot 1,1 \cdot I \\
\hat{r}_2(A) &= 0 + P_{2,AD}(A) \cdot E(U[0,1]) \cdot I(1 + 2 \cdot 0,1) \\
&= 1 \cdot 0,5 \cdot 1,2 \cdot I \\
\hat{r}_2(D) &= 0,1 \cdot I \cdot P_{2,J} \\
&= 0,1 \cdot I \\
\hat{r}_J &= -c + 0,1 \cdot I \cdot P_{J,J} + 1,1 \cdot I \cdot P_{J,AD} \\
&= -c + 0,1 \cdot I \cdot r + 1,1 \cdot I \cdot (1-r)
\end{aligned}
$$

Si se tienen las probabilidades estacionarias sólo faltaría calcular g_s $\forall s$.

$$g_s = \sum_{i \in E} \hat{r}_i^s \pi_i^s$$

La política óptima sería aquella que otorga el mayor ingreso esperado para la empresa, es decir, s^* tal que $g_s^* \geq g_s$ $\forall s$.