Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: INVESTIGACIÓN OPERATIVA

Programación Dinámica Determinística

Denis Sauré V.
Julio, 2003.

1. Problemas de Programación Dinámica Determinística

1. Un conejo de pascua tiene N huevos de chocolate para repartir entre los M niños que el conejo superior ha asignado a sus distrito. La felicidad de un niño puede ser modelada como $u_i(x_i) = ln(x_i)$ donde x_i es la cantidad de huevos que recibe el niño i (si el niño $i-$ésimo no recibe huevos se morirá de tristeza). Adicionalmente se sabe que los padres de los niños tienen restricciones sobre la cantidad de chocolates que puede comer cada uno de ellos, siendo N_i^{max} la cantidad máxima de huevos que los padres del niño i aceptarán que les traigan. De exceder dicha cantidad, serán los padres que se comerán los huevos. Formule un modelo de programación dinámica que permita al conejo decidir cuántos huevos entregar a cada niño, de modo de maximizar la felicidad total de los niños del distrito.

2. (*) La familia Sampsons va a salir de vacaciones desde su ciudad natal Sprangfield. La familia desea visitar n ciudades y dispone de un total de M días para hacerlo, con $M \geq n$. La familia desea saber cuantos días permanecer en cada ciudad de modo de maximizar la satisfacción total de sus vacaciones sabiendo que para cada ciudad i existe una función de satisfacción g_i que es función del número de días de permanencia. Suponga que no se pierde un tiempo considerable en el traslado de una ciudad a otra.

   a) Plantee un modelo de programación dinámica para resolver la planificación de las vacaciones de los Sampsons.

   b) Suponga que $n = 3$ y $M = 5$ y que las funciones de beneficio $g_k(x_k)$ vienen dadas por:

	$g_1(x_1)$	$g_2(x_2)$	$g_3(x_3)$
$x_k = 0$	0	0	0
$x_k = 1$	1	1	1
$x_k = 2$	2	4	3
$x_k = 3$	3	6	3
$x_k = 4$	4	8	2
$x_k = 5$	5	8	1

3. Considere el siguiente problema de programación no lineal y utilice programación dinámica para resolverlo:

   $\max Z = 36 \cdot X_1 + 9 \cdot X_1^2 - 6 \cdot X_1^3 + 36 \cdot X_2 - 3 \cdot X_2^3$

   s.a.

   $X_1 + X_2 \leq 3, \quad X_1 \wedge X_2 \geq 0$

4. (*) El gerente de sistemas de una compañía desea aumentar la confiabilidad de la computadora que maneja los datos de ventas de la empresa. Para que esta computadora funcione, deben trabajar correctamente cada uno de sus N subsistemas. Para aumentar la confiabilidad de la computadora se pueden agregar unidades de reserva a cada una de estos subsistemas, lo que modifica sus probabilidades de falla.

   Agregar una unidad de reserva al subsitema i-ésimo cuesta C_i. La probabilidad que cada subsistema funcione correctamente es conocida e igual a $P_i(n)$, donde n es el número de unidades de reserva que tenga el subsistema i (i=1 ...N).

   a) Plantee un modelo de programación dinámica que permita encontrar la configuración de unidades de reserva que maximiza la probabilidad que la computadora funcione correctamente si Ud. dispone de X pesos.

b) Considere que N = 3 (tres subsistemas), $C_1 = \$100$, $C_2 = \$300$, $C_3 = \$200$, y las probabilidades $P_i(n)$ de la tabla, donde, por ejemplo, $P_2(2) = 0,95$ es la probabilidad que el subsistema 2 funcione correctamente con 2 unidades de reserva. Usando programación dinámica encuentre la configuración de unidades de reserva que maximiza la probabilidad que la computadora funcione correctamente si Ud. dispone de \$600.

Unidades de reserva	sub sistema 1	sub sistema 2	sub sistema 3
0	0,85	0,60	0,70
1	0,90	0,85	0,90
2	0,95	0,95	0,98

5. Durante el mes t (t=1,...,T) una botillería se enfrenta a una demanda de d_t unidades de su producto artesanal "Pistol-Cola". El costo de los insumos para producir tan singular brebaje durante el mes t tiene dos componentes: Primero, se incurre en un costo de $c_t(x)$ si se producen x unidades en el mes t. Segundo, si el nivel de producción de la empresa durante el mes $t-1$ es x_{t-1} y el nivel de producción durante el mes t es x_t, entonces se incurrirá durante el mes t en un costo de suavizamiento o atenuación igual a $A \cdot |x_t - x_{t-1}|$. Al final de cada mes se incurre en un costo de almacenamiento de h_t, por unidad. Adicionalmente se incurre en un costo de I_t por cada unidad de demanda insatisfecha durante el mes t, la cual se desplazará para el mes siguiente, es decir, si se tienen y clientes insatisfechos el mes t, la demanda en el mes $t+1$ sera $d_{t+1} + y$. El costo de terminar el período de planificación con algún cliente insatisfecho es *muy alto*. Se sabe que inicialmente se cuenta con un inventario de S_1 productos y que la producción del mes 0 fue x_0.

   Plantee un modelo de programación dinámica que permita a la empresa maximizar las ganancias en los próximos T meses.

6. (*) El pueblo de Gville cuenta con una única estación de buses, a la cual acuden sus habitantes con el fin de acudir a la Gran ciudad, único destino de los buses. Los individuos arriban en grupos a intervalos de 1 minuto. De esta forma, al comienzo del minuto t(t=1,...,T) arriban d_t pasajeros a la estación deseosos de iniciar su jornada laboral. Cada minuto el administrador del recinto debe decidir qué cantidad de buses deben iniciar su recorrido. Por cada viaje y por cada bus se incurre en un costo F (por combustible). Considere que el pasaje del bus cuesta P y que sólo se dispone de B buses al comienzo del día, cada uno con capacidad para K pasajeros. Excepcionalmente la empresa incurre en un costo de E_t pesos por cada pasajero que debe esperar t minutos para abordar su bus ($t > 1$) y en un costo de H por cada pasajero que no viaja a la ciudad por falta de capacidad.

   Plantee un modelo de programación dinámica que permita al administrador asignar la partida de los buses de forma de maximizar la ganancia diaria.

7. (*) Un prestigioso taller mecánico, especialista en mantención y reparación de motores, tiene una máquina especializada para estos fines y desea saber cuándo cambiar dicha máquina. Para ello cuenta con los siguientes datos:

   - Una máquina nueva cuesta C [u.m].
   - El taller puede mantener una máquina por 1, 2 o 3 años.
   - Una máquina con i años de uso puede ser vendida en el mercado en v_i [u.m].
   - El costo anual de mantención de una máquina con i años de uso es m_i [u.m].

   El taller busca una política óptima de reemplazo que minimice los costos totales durante 5 años restringidos a que siempre debe haber una máquina sabiendo que se compró una máquina el año 1 y que se venderá al final del año 5.

8. El ayudante de un curso tiene N novias. Un día, luego de cobrar los miserables P [$] que le correspondía por hacer sus clases, decidió ir a visitar a sus pretendientes en las T unidades de tiempo que le quedaban. La novia i puede recibir al auxiliar en el horario $[a_i, b_i]$ (la visita no puede comenzar antes de las a_i y no puede terminar después de las b_i). Por cada unidad de tiempo que este individuo le dedique a su novia i le significará un costo de p_i [$/u.t] y si le dedica t unidades de tiempo sentirá una utilidad de $u_i(t)$ [unidades de satisfacción].

a) Formule un modelo de programación dinámica que permita al auxiliar planificar su día de modo de maximizar la satisfacción la utilidad total.

b) Considere que $N = 3$, $T = 5$ y que no hay restricciones de presupuesto. Suponga además que los bloques horarios vienen dados por [0,1], [1,3], [2,5]. Si se sabe que:

$$u_i(t) = i^2 - (i - t)^2 \; \forall i$$

¿Cuál es la planificación óptima para este ayudante?.

Hint: Ignore los rendimientos decrecientes de escala en la satisfacción del individuo.

9. (*) El Gerente Comercial de una compañía está estudiando la introducción de nuevos productos para la próxima temporada, por lo que debe decidir qué productos comercializar y cúantas unidades cd c/u producir.

La producción de cada uno de estos productos, según lo informado por el Gerente de Operaciones, tiene asociado un costo fijo que depende del tipo de producto, igual a C_i. Además, la producción de cada unidad de producto i requiere utilizar un porcentaje de la capacidad disponible en la planta igual a K_i. Suponga que no existen otros costos de producción.

Por otra parte, dadas las condiciones de mercado, sabe que sus ingresos por unidad vendida serán U_i y que el mercado a lo más comprará D_i unidades del producto i elaborado por la compañía.

a) Plantee el modelo de programación dinámica que apoye las decisiones de producción para el problema general descrito, si se busca maximizar las utilidades (Ingresos - Costos totales) de la firma.

Supongamos ahora que los productos en evaluación son 3 y que se cuenta con la siguiente información relevante:

	P 1	P 2	P 3
Costo fijo	3	2	0
Ingreso por unidad vendida	2	3	1
% de capacidad usada por cada unidad	20	40	20

Como se ve en la primera fila de la tabla anterior, el gerente sabe que 2 de estos productos requieren un costo fijo importante. También conoce el ingreso que recibirá la empresa por cada unidad producida, una vez que la producción está en marcha. Además, como se ve en la tercera fila de la tabla, se sabe el porcentaje de capacidad disponible que ocupa cada unidad de producto al ser fabricada. Por condiciones del mercado se sabe que se pueden vender sólo 3 unidades de producto 1, mientras que es posible vender todas las unidades que se puedan fabricar de los otros productos.

b) En esta situación resuelva, ocupando el modelo de programación dinámica planteado en la parte anterior, la estrategia de producción óptima.

c) Ahora considere que las variables que representan las cantidades de productos a fabricar son variables continuas. Suponga que tanto los ingresos por unidad como el porcentaje de capacidad utilizada dadas en la tabla anterior son proporcionales a las fracciones de productos y se mantienen las condiciones de mercado. Plantee y resuelva el nuevo modelo.

10. (*) En una popular comuna el alcalde está bastante preocupado por la seguridad ciudadana, por lo que ha decidido implementar un curioso sistema de botones de pánico, a través de los cuales la amedrentada población podrá pedir ayuda en caso de emergencia.

Después de grandes esfuerzos por conseguir presupuesto, el alcalde cuenta con un capital que le permite instalar un máximo de K botones, los cuales debe distribuir en los M barrios de su comuna. (con $K > M$).

Según el experimentado equipo de asesores del edil, que ya piensan en la reelección, si en el barrio m se instalan k botones, el alcalde ganará $P_m(k)$ votos adicionales.

Suponga que es contratado para determinar la asignación que maximiza la cantidad de votos que conseguirá el alcalde en la próxima elección, producto de su campaña de seguridad ciudadana.

a) ¿Por qué este problema es susceptible a ser abordado por un enfoque de programación dinámica?.

b) Modele el problema usando programación dinámica determinística, explicitando claramente las etapas, variables de decisión, variables de estado y funciones de beneficio.

Suponga ahora que si en un barrio m, se instalan más de U_m botones, la oposición al alcalde lo acusará públicamente de populista y derrochador. Esto implica una pérdida de r_m votos por cada botón por sobre U_m, instalado en esta zona.

Por otra parte, si en el barrio m se asignan menos de L_m aparatos de emergencia, la junta de vecinos del sector también iniciará una campaña de desprestigio que implica la pérdida de t_m sufragios por cada botón por debajo de L_m.

c) Modele el nuevo escenario, usando programación dinámica determinística.

d) Suponga que $M = 3$ y $K = 5$. Además se sabe que $L_1 = L_2 = L_3 = 2$ y $U_1 = U_2 = U_3 = 3$ y se cuenta con estimaciones de los votos que obtendrá el alcalde en cada barrio, en función del número de botones que instale, la que se resume en la siguiente tabla. Con esta información y usando el modelo planteado en la parte (c), encuentre la asignación óptima de botones.

N° Botones de pánico	Barrio 1	Barrio 2	Barrio 3
0	0	0	0
1	45	20	50
2	70	45	70
3	90	75	80
4	105	110	100
5	120	150	130
r	10	15	20
t	10	15	20

2. Resolución Problemas de Programación Dinámica Determinística

■ **2.** *a*) Consideremos que la familia ya definió cuál será el orden en que visitará las ciudades (si efectivamente decide visitarlas). En dicho caso, una etapa estará en relación unívoca con una ciudad (Cada ciudad es una etapa y se pasará a la siguiente etapa cuando se pase a la siguiente ciudad). Además, el estado vendrá dado por el número de días que le restan a la familia para completar el total de días disponibles [1]. Así, podemos definir:
x_i = Número de días en la ciudad i (variable de decisión de la etapa i)
y_i = Número de días sobrantes después de visitar la ciudad $i-1$ ó justo antes de visitar la ciudad i (variable de estado).

Analicemos las ecuaciones recursivas:

- **Condición de borde (última etapa):**
En este caso habremos visitado las ciudades $1, 2, \ldots, n-1$ y tendremos y_n días disponibles para usar (dependiendo de cuántos días hayamos decidido quedarnos en las ciudades anteriores, y_n puede tener varios valores posibles.
Luego, el problema a resolver viene dado por:

$$\begin{aligned} V_n(y_n) &= \max\ g_n(x_n) \\ & \quad\ s.a \quad 0 \leq x_n \leq y_n \\ & \quad\ x_n \text{ entero} \\ &= \text{valor de la política óptima de estadía en la ciudad n si la familia} \\ & \quad\ \text{ya ha visitado n-1 ciudades y aún dispone de } y_n \text{ días disponibles} \end{aligned}$$

- **Recursión genérica k:**
En este caso habremos visitado las ciudades $1, 2, \ldots, k-1$ y nos quedan por visitar las ciudades $k, k+1, \ldots, n$ siendo y_k el número de días que aún nos quedan disponibles. Luego nuestro problema a resolver será encontrar el número de días a permanecer en la ciudad k de modo de maximizar el beneficio de actual más el beneficio de visitar las próximas ciudades suponiendo que de ahora en adelante tomaremos las decisiones óptimas dado los días que nos quedarán luego de tomar nuestra decisión hoy:

$$\begin{aligned} V_k(y_k) &= \max\{g_k(x_k) + V_{k+1}(y_k - x_k)\} \\ & \quad\ s.a \quad 0 \leq x_k \leq y_k \\ & \quad\ x_n \text{ entero} \\ &= \text{satisfacción total óptima por visitar a las ciudades } k, k+1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Finalmente el óptimo de la satisfacción de las vacaciones de la familia Sampson viene dado por:

$$V^{\star} = V_1(M)$$

b) Debemos resolver los problemas asociados a cada etapa partiendo desde la última [2], para cada uno de los posibles estados en que puede llegar el problema a la etapa en cuestión.

Para resolver cada uno de estos problemas haremos una enumeración explícita de los casos posibles para cada etapa y seleccionaremos la mejor [3].

[1] También puede considerarse el número de días que ya han gastado
[2] Porque este es un problema que podremos resolver directamente sin necesitar los resultados de las próximas etapas
[3] En un problema general no se resolverá de forma tan ineficiente, sino que se recurrirá a otras técnicas: Simplex, Branch & Bound, métodos de descenso, etc.

- **Ciudad 3**:

y_3	$g_3(0)$	$g_3(1)$	$g_3(2)$	$g_3(3)$	$g_3(4)$	$g_3(5)$	$V_3^\star(y_3)$	x_3^*
0	0	i	i	i	i	i	0	0
1	0	1	i	i	i	i	1	1
2	0	1	3	i	i	i	3	2
3	0	1	3	3	i	i	3	2,3
4	0	1	3	3	2	i	3	2,3
5	0	1	3	3	2	1	3	2,3

i: infactible, es decir, la familia no puede quedarse esa cantidad de días porque ya no le quedan tantos.

- **Ciudad 2**:

	$g_2(x_2)+V_3(y_2-x_2)$							
y_2	$x_2=0$	$x_2=1$	$x_2=2$	$x_2=3$	$x_2=4$	$x_2=5$	$V_2^\star(y_2)$	x_2^*
0	0+0	i	i	i	i	i	0	0
1	0+1	1+0	i	i	i	i	1	0,1
2	0+3	1+1	4+0	i	i	i	4	2
3	0+3	1+3	4+1	6+0	i	i	6	4
4	0+3	1+3	4+3	6+1	8+0	i	8	4
5	0+3	1+3	4+3	6+3	8+1	8+0	9	4,3

i: infactible, es decir, la familia no puede quedarse esa cantidad de días porque ya no le quedan tantos.

- **Ciudad 1**:

En este caso, como sabemos que inicialmente (antes de visitar la primera ciudad), la familia dispone de 5 días para sus vacaciones, solo analizamos el caso $y_1 = 5$

	$g_1(x_1)+V_2(y_1-x_1)$							
y_1	$x_1=0$	$x_1=1$	$x_1=2$	$x_1=3$	$x_1=4$	$x_1=5$	$V_1^\star(y_1)$	x_1^*
5	0+9	1+8	2+6	3+4	4+1	5+0	9	0,1

Finalmente existen 3 soluciones óptimas, todas con beneficio óptimo =9, cuyas estadías en cada ciudad viene dadas por:

Solución	Ciudad 1	Ciudad 2	Ciudad 3
Itinerario 1	0	3	2
Itinerario 2	0	4	1
Itinerario 3	1	4	0

■ **4.** *a*) Modelo general

Estados: $i = 1, \dots N$ c/u de los subsistemas

Variable de estado: S_i, \$ disponible al inicio de la etapa i-ésima (antes de decidir el número de unidades de reserva del subsitema i). $S_i \in [0,\, X]$

Variable de decisión: D_i Número de unidades de reserva para el subsistema i-ésimo,
$D_i \in [0,\, [\frac{S_i}{C_i}]_-]$ (restricción de la maximización).

Recursión: $S_{i+1} = S_i - D_i \cdot C_i$

Función objetivo: Buscaremos maximizar la probabilidad que no falle el sistema (y, por lo tanto, que no falle ninguno de los subsistemas)

$$V_i^\star(S_i) = \max_{D_i} \Big[P_i(D_i) \cdot V_{i+1}^\star(S_i - D_i \cdot C_i) \Big]$$

s.a. $D_i \cdot C_i \leq S_i$

Condiciones de Borde:

- $S_1 = X$
- $V_{N+1} = 1$ (Valor residual, neutro de la función beneficio)

b) Caso Particular

Subsistema 3

\$	0	1	2	$V^\star$(\$)	$D^\star$
0	0,7	i	i	0,7	0
100	0,7	i	i	0,7	0
200	0,7	0,9	i	0,9	1
300	0,7	0,9	i	0,9	1
400	0,7	0,9	0,98	0,98	2
500	0,7	0,9	0,98	0,98	2
600	0,7	0,9	0,98	0,98	2

Subsistema 2

\$	0	1	2	$V^\star$(\$)	$D^\star$
0	$0{,}6 \cdot 0{,}7$	i	i	0,42	0
100	$0{,}6 \cdot 0{,}7$	i	i	0,42	0
200	$0{,}6 \cdot 0{,}9$	i	i	0,54	0
300	$0{,}6 \cdot 0{,}9$	$0{,}85 \cdot 0{,}7$	i	0,595	1
400	$0{,}6 \cdot 0{,}98$	$0{,}85 \cdot 0{,}7$	i	0,595	1
500	$0{,}6 \cdot 0{,}98$	$0{,}85 \cdot 0{,}9$	i	0,765	1
600	$0{,}6 \cdot 0{,}98$	$0{,}85 \cdot 0{,}9$	$0{,}95 \cdot 0{,}7$	0,765	1

■ **6.** Para desarrollar este problema supondremos que los buses partirán al comienzo del minuto designado de partida, justo después de la llegada de la cantidad d_t de pasajeros. Además supondremos que los pasajeros abordan los buses de acuerdo a su orden de llegada. De acuerdo a esto podemos plantear el siguiente modelo de programación dinámica:

- **Etapas**: $t = 1, \ldots, T$ c/u de los minutos.
- **Variable de estado:**
  - S_i^t= número de personas que al comienzo del minuto t llevan esperando i minutos para abordar el bus. ($i > 0, \quad t \in \{1, \ldots, T\}$.
  - B_t= el número de buses disponibles, al comienzo del minuto t (antes de la decisión).
- **Variable de decisión:**
  - N_t= número de buses a despachar al comienzo del minuto t.

- **Recursión:**

$$
\begin{aligned}
S_i^{t+1} &= S_{i-1}^t - \text{mín}\left\{ S_{i-1}^t, \text{máx}\{0, K \cdot \text{mín}\{N_t, B_t\} - \sum_{k=0}^{T-i+2} S_{T-k}^t\} \right\} \qquad \forall i > 0 \\
S_1^{t+1} &= D_t - \text{mín}\left\{ D_t, \text{máx}\{0, K \cdot \text{mín}\{N_t, B_t\} - \sum_{k=0}^{T-i+2} S_{T-k}^t\} \right\} \\
B_{t+1} &= \text{máx}\{B_t - N_t, 0\}
\end{aligned}
$$

- **Función objetivo:** Minimizamos los costos acumulados hacia el futuro, asumiendo que tomaremos las decisiones óptimas desde el próximo período en adelante:

$$
\begin{aligned}
V_t^*(\vec{S}_t, B_t) = \max_{N_t \le B_t} \Bigg[& P \cdot \text{mín}\{N_t \cdot K, D_t + \sum_{k=1}^{T} S_k^t\} - F \cdot N_t \\
& - \sum_{k=1}^{T} E_t \cdot \text{mín}\left\{ S_k^t, \text{máx}\{0, K \cdot \text{mín}\{N_t, B_t\} - \sum_{j=0}^{T-k+1} S_{T-j}^t\} \right\} \\
& + V_{t+1}^*(\vec{S}_{t+1}, B_{t+1}) \Bigg]
\end{aligned}
$$

- **Condiciones de Borde:**
  - $\vec{S}^1 = \vec{0}$
  - $V_{T+1}^* = -H \cdot \sum_{k=1}^{T} S_k^{T+1}$
  - $B_1 = B$

7. En el problema identificamos:

- **Etapas**: Corresponden a los años del horizonte $(t_0, t_1, t_2, ..., t_5)$.
- **Decisiones**: En cada etapa debemos decidir si conservar o cambiar la máquina.
- **Estados**: Edad de la máquina al final de la etapa $(l_{t_0}, l_{t_1}, l_{t_2}, ..., l_{t_5})$.

Notamos que:

a) En t_0 estamos obligados a comprar y en t_5 obligados a vender.

b) El espacio de edades posibles varía dependiendo de la etapa:

$$l_0 \in \{0\}, l_1 \in 1, l_2 \in \{1, 2\}, l_3, l_4, l_5 \in \{1, 2, 3\}$$

Definimos:

$V_{t_i}(l_i)$ = Costo de la política óptima desde t_i hasta el final, dado que la edad de la máquina en t_i es l_i. Con esto, lo que queremos calcular es $V_{t_0}(0)$.

- **Año 5**
  La máquina debe venderse al final del último año, al valor correspondiente a la edad de la máquina.

$$V_{t_5}(l_5) = -v_{l_5}$$

- **Año 4**
  El problema a resolver dependerá de la edad que tenga la máquina. En efecto, si tuviera 3 años no tendríamos más que cambiar.

$$
\begin{aligned}
V_{t_4}(3) &= -v_3 + C + m_1 + V_{t_5}(1) \\
V_{t_4}(2) &= \begin{cases} -v_2 + C + m_1 + V_{t_5}(1) & \text{(Cambiar)} \\ m_3 + V_{t_5}(3) & \text{(Conservar)} \end{cases} \\
V_{t_4}(1) &= \begin{cases} -v_1 + C + m_1 + V_{t_5}(1) & \text{(Cambiar)} \\ m_2 + V_{t_5}(2) & \text{(Conservar)} \end{cases}
\end{aligned}
$$

- **Año 3**
  El problema a resolver nuevamente dependerá de la edad que tenga la máquina.

$$
\begin{aligned}
V_{t_3}(3) &= -v_3 + C + m_1 + V_{t_4}(1) \\
V_{t_3}(2) &= \begin{cases} -v_2 + C + m_1 + V_{t_4}(1) & \text{(Cambiar)} \\ m_3 + V_{t_4}(3) & \text{(Conservar)} \end{cases} \\
V_{t_3}(1) &= \begin{cases} -v_1 + C + m_1 + V_{t_4}(1) & \text{(Cambiar)} \\ m_2 + V_{t_4}(2) & \text{(Conservar)} \end{cases}
\end{aligned}
$$

- **Año 2**
  El problema a resolver nuevamente dependerá de la edad que tenga la máquina. Sin embargo, en el año 2 (dado que se compra una nueva en t_1), sólo podría tener una edad de 1 o 2.

$$V_{t_2}(2) = \begin{cases} -v_2 + C + m_1 + V_{t_3}(1) & \text{(Cambiar)} \\ m_3 + V_{t_3}(3) & \text{(Conservar)} \end{cases}$$

$$V_{t_2}(1) = \begin{cases} -v_1 + C + m_1 + V_{t_3}(1) & \text{(Cambiar)} \\ m_2 + V_{t_3}(2) & \text{(Conservar)} \end{cases}$$

- **Año 1**
  El problema a resolver nuevamente dependerá de la edad que tenga la máquina. Pero, en el año 1 (dado que se compra una nueva en t_1), sólo podría tener una edad de 1.

$$V_{t_1}(1) = \begin{cases} -v_1 + C + m_1 + V_{t_2}(1) & \text{(Cambiar)} \\ m_2 + V_{t_2}(2) & \text{(Conservar)} \end{cases}$$

- **Año 0**
  Al inicio del primer período, necesariamente debemos comprar una máquina nueva.

$$V_{t_0}(0) = C + m_1 + V_{t_1}(1)$$

■ **9.** *a*) Parte a:

- **Variables de decisión**:

$$
\begin{aligned}
X_n &= \text{unidades de producto n a producir} \\
y_n &= \begin{cases} 1 & \text{Si se fabrica producto n} \\ 0 & \sim \end{cases}
\end{aligned}
$$

- **Variables de estado**:

$$S_n = \% \text{ de la capacidad total disponible para producir producto } n$$

- **Beneficio acumulado**:

$$\begin{aligned}
B_n[S_n, X_n] &= U_n \cdot X_n - C_n \cdot Y_n + V_{n+1}[S_n - K_n \cdot X_n] \\
\text{con } S_{n+1} &= S_n - Kn \cdot X_n \\
\text{donde } V_n[S_n] &= \max_{0 \le X_n \le \min(\frac{S_n}{K_n}, D_n)} \big[B_n[S_n]\big]
\end{aligned}$$

- **Condiciones de borde**:

$$\begin{aligned}
S_1 &= 100\,\% \\
V_{N+1} &= 0
\end{aligned}$$

b) **Producto 3**:

S_3/X_3	0	1	2	3	4	5	$V_3[S_3]$	$X_3^\star$
100 %	0	1	2	3	4	5	5	5
80 %	0	1	2	3	4		4	4
60 %	0	1	2	3			3	3
40 %	0	1	2				2	2
20 %	0	1					1	1
0 %	0						0	0

Producto 2:

S_2/X_2	0	1	2	$V_2[S_2]$	$X_2^\star$
100 %	5	4	5	5	0-2
80 %	4	3	4	4	0-2
60 %	3	2		3	0
40 %	2	1		2	0
20 %	1			1	0
0 %	0			0	0

Producto 1:

S_1/X_1	0	1	2	3	$V_1[S_1]$	$X_1^\star$
100 %	5	3	4	5	5	0-3

Por lo tanto existen 3 configuraciones óptimas:

$X_1^\star$	$X_2^\star$	$X_3^\star$
0	0	5
3	0	2
0	2	1

c) La formulación es igual a la de la primera parte, salvo que las variables X_n son continuas. Entonces debemos resolver para la función de beneficio acumulada,

$$B_n[S_n, X_n] = U_n \cdot X_n - C_n \cdot Y_n + V_{n+1}[S_n - K_n \cdot X_n]$$

$$\text{con} \qquad S_{n+1} = S_n - Kn \cdot X_n$$

y maximizar para las variables X_n continuas. Como las X_n son continuas, las variables de estado S_n también lo serán.

Producto 3: $K_3 = 20$

$$B_3[S_3, X_3] = U_3 \cdot X_3 - C_3 \cdot Y_3 + V_4[S_3 - K_3 \cdot X_3]$$

Sin embargo

$$V_4[S_4] = V_4[S_3 - K_3 \cdot X_3] = 0, C_3 = 0, U_3 = 1$$

Entonces, $B_3[S_3, X_3] = X_3$ y debemos maximizar para todos los valores reales positivos que podría tomar X_3.

Estos valores posibles van desde 0 hasta $\frac{S_3}{20}$, que significa que se produce con todo lo que queda de capacidad disponible.

Es decir, $X_3^\star = \frac{S_3}{20}$ lo que implica que $V_3[S_3] = \frac{S_3}{20}$.

Producto 2: $K_2 = 40$

$$B_2[S_2, X_2] = U_2 \cdot X_2 - C_2 \cdot Y_2 + V_3[S_2 - K_2 \cdot X_2] = 3 \cdot X_2 - 2 \cdot Y_2 + V_2[S_2 - K_2 \cdot X_2]$$

$$B_2[S_2, X_2] = 3 \cdot X_2 - 2 \cdot Y_2 + \frac{(S_2 - K_2 \cdot X_2)}{20}$$

Ahora tenemos que analizar 2 casos.

- $Y_2 = 0 \Rightarrow X_2 = 0$
  por lo que $B_2[S_2, X_2] = \frac{S_2}{20} = V_2[S_2]$

- $Y_2 = 1 \Rightarrow$

  $$B_2[S_2, X_2] = 3 \cdot X_2 - 2 + \frac{(S_2 - 40 \cdot X_2)}{20} = X_2 - 2 + \frac{S_2}{20}$$

  Para maximizar $B_2[S_2, X_2]$ en este caso, X_2 debe tomar el máximo valor posible, que es $\frac{S_2}{40}$, con lo que

  $$V_2[S_2] = 3 \cdot \frac{S_2}{40} - 2$$

Producto 1: $K_1 = 20$, $D_1 = 3$ y por condición de borde $S_1 = 100(\%)$

$$B_1[S_1, X_1] = U_1 \cdot X_1 - C_1 \cdot Y_1 + V_2[S_2] = 2 \cdot X_1 - 3 \cdot Y_1 + V_2[S_1 - K_1 \cdot X_1]$$

- $Y_1 = 0$, entonces, $B_1[S_1, X_1] = V_2[S_1]$. Tenemos 2 subcasos:

  - $Y_2 = 0$, implica, $V_1[S_1] = V_2[S_1] = \frac{S_1}{20} = 5$

  - $Y_2 = 1$, implica, $V_1[S_1] = V_2[S_1] = 3 \cdot \frac{S_1}{40} - 2 = 5,5$

- $Y_1 = 1$, entonces maximizamos $B_1[S_1, X_1] = 2 \cdot X_1 - 3 + V_2[S_1 - 20 \cdot X_1]$

  - $Y_2 = 0$, implica, $B_1[S_1, X_1] = 2 \cdot X_1 - 3 + \frac{(S_1 - 20 \cdot X_1)}{20}$

    $B_1[S_1, X_1] = X_1 - 3 + \frac{S_1}{20}$

    Para maximizar X_1 debe ser lo mayor posible, $X_1 = 3$ ya que $S_1 = 100$

$$V_1[S_1] = \frac{S_1}{20} = 5$$

  - $Y_2 = 1$, análogamente implica que $B_1[S_1, X_1] = \frac{X_1}{2} - 5 + 3 \cdot \frac{S_1}{40}$. Por lo que $X_1 = 3$ y como $S_1 = 100$,

$$V_1[S_1] = 4$$

De todos los casos vemos que el máximo beneficio acumulado es $V_1[S_1] = 5,5$ que significa $Y_1 = 0$, por lo que $X_1 = 0$.

Además $Y_2 = 1$, con lo que $X_2 = \frac{S_2}{40} = \frac{S_1}{40} = 2,5$ (se ocupa toda la capacidad en fabricar producto 2. Por lo tanto $X_3 = 0$

$\Rightarrow X_1^\star = 0$,
$\Rightarrow X_2^\star = 2,5$,
$\Rightarrow X_3^\star = 0$,
$V_1[S_1] = 5,5$.

■ **10.** *a*) En este punto se deben incluir argumentos como: Existe un conjunto de decisiones interrelacionadas, si se modelan adecuadamente las etapas se tendrá que la decisión para una de ellas es independiente de decisiones pasadas y sólo dependerá de variables de estado, etc.

b) De acuerdo al procedimiento usual para definir un modelo de programación dinámica se tendrá:

- **Etapas**:
  Cada uno de los barrios, $m : 1, ..., M$.

- **Variables de estado**:
  S_m, el número de botones restantes en la etapa m (sin asignar).
- **Variables de decisión**:
  X_m, el número de botones asignados al barrio m.
- **Recurrencia de estados**:

$$S_{m+1} = S_m - X_m$$

- **Función de beneficios**:

$$V_m(S_m, X_m) = P(X_m) + V^*_{m+1}(S_m - X_m)$$

  Donde:

$$V^*_m(S_m) = \max_{X_m \leq S_m} \{V_m(S_m, X_m)\}$$

- **Condiciones de borde**:

$$V^*_{M+1}(\%) = 0$$
$$S_1 = K$$

c) Al igual que en el punto anterior se tendrá que:

- **Etapas**:
  Cada uno de los barrios, $m : 1, ..., M$.
- **Variables de estado**:
  S_m, el número de botones restantes en la etapa m (sin asignar).
- **Variables de decisión**:
  X_m, el número de botones asignados al barrio m.
- **Recurrencia de estados**:

$$S_{m+1} = S_m - X_m$$

- **Función de beneficios**:

$$V_m(S_m, X_m) = P(X_m) - r_m \cdot \max\{0, X_m - U_m\} - t_m \cdot \max\{0, L_m - X_m\} + V^*_{m+1}(S_m - X_m)$$

  Donde:

$$V^*_m(S_m) = \max_{X_m \leq S_m} \{V_m(S_m, X_m)\}$$

- **Condiciones de borde**:

$$\begin{aligned} V^*_{M+1}(\%) &= 0 \\ S_1 &= K \end{aligned}$$

d) De acuerdo al punto anterior y a los datos provistos en el enunciado tendremos que:

Para **m=3**:

S_3	$x_3=0$	$x_3=1$	$x_3=2$	$x_3=3$	$x_3=4$	$x_3=5$	V_3^*	x_3^*
0	-40	-	-	-	-	-	-40	0
1	-40	30	-	-	-	-	30	1
2	-40	30	70	-	-	-	70	2
3	-40	30	70	80	-	-	80	3
4	-40	30	70	80	80	-	80	4
5	-40	30	70	80	80	90	90	5

Para **m=2**:

S_2	$x_2=0$	$x_2=1$	$x_2=2$	$x_2=3$	$x_2=4$	$x_2=5$	V_2^*	x_2^*
0	-70	-	-	-	-	-	-70	0
1	0	-35	-	-	-	-	0	0
2	40	35	5	-	-	-	40	0
3	50	75	75	35	-	-	75	1,2
4	50	85	115	105	55	-	115	2
5	60	85	135	145	125	80	145	3

Para **m=1**:

S_1	$x_1=0$	$x_1=1$	$x_1=2$	$x_1=3$	$x_1=4$	$x_1=5$	V_1^*	x_1^*
5	125	150	145	130	95	30	150	1

Entonces la estrategia es la siguiente:

- Barrio 1: 1 Botones
- Barrio 2: 2 Botones
- Barrio 3: 2 Botones

Esta estrategia consigue un total de 150 votos.

e) 1) Una de las respuestas posibles es replantear el modelo, sin embargo esto requiere mucho esfuerzo en la modelación (no solo basta con agregar una variable de estado que indique si sobrepase el limite Y de botones, dado que toda la estructura de costos será afectada por el valor de la variable).
La idea de la pregunta es que los alumnos notasen que esta problemática puede ser resuelta utilizando el modelo de programación de la parte anterior y comparando los resultados entre instancias: La primera, contar con K botones, pero solo ganar la mitad de los votos. La segunda es mantener la estructura de votos original pero solo contar con Y botones inicialmente. La que entregue un mayor número de votos será la estrategia óptima.

2) Esto es tan solo aplicar el mismo modelo de programación, pero considerando la existencia de $Z \cdot M$ barrios.