Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: INVESTIGACIÓN OPERATIVA

Árboles de Decisión

Denis Sauré V.
Julio, 2003.

1. Problemas de Árboles de Decisión

1. (*) Una empresa que produce piezas puede ser clasificada como clase A (empresa *en control*, es decir, produce un 2 % de piezas defectuosas) o clase B (empresa *fuera de control*, con un 20 % de piezas defectuosas). Históricamente se sabe que la probabilidad de que una empresa esté en clase A es de un 90 %.

   Por otro lado continuar con el proceso productivo de la empresa cuando está fuera de control representa un costo de 400 [UM], mientras que detener el proceso cuando está en control representa un costo de 120 [UM].

   Existe la posibilidad de tomar una muestra aleatoria de 1 pieza, a un costo de 5 [UM], que permite determinar la calidad de dicha pieza, es decir, si es defectuosa o está correctamente fabricada.

   a) Construya un árbol de decisión que permita decidir si se debe continuar con la producción, o si ésta se debe detener, además de determinar si es conveniente realizar el muestreo aleatorio para apoyar la decisión.

   b) Suponga que realizar el muestreo aleatorio para un tamaño de 2 piezas tiene un costo de 8 [UM] ¿Es conveniente utilizar este nuevo muestreo para apoyar la decisión de continuar o detener la producción?.

   c) ¿Cuál es el valor esperado de la información perfecta?.

2. Una tribu de nómades debe decidir entre quedarse otra temporada en el mismo lugar o buscar un nuevo lugar para vivir. La probabilidad que el lugar donde viven esté bueno la próxima temporada es de un 40 %, mientras que la probabilidad que un lugar diferente esté bueno es de un 50 % (no ha sufrido erosión).

   El jefe tiene la posibilidad de hacer un test que permite evaluar con más precisión la calidad del terreno actual. En años anteriores se ha realizado el mismo test y en 20 ocasiones en que el pueblo evaluó como bueno el terreno, en 16 oportunidades el test había arrojado previamente resultados positivos (en los 4 restantes había arrojado resultados negativos). En 10 ocasiones en que el pueblo evaluó al terreno como malo, 6 veces había antecedentes de resultados negativos del test mientras que en las 4 restantes el test había arrojado resultados positivos.

   Realizar el test (que significa el esfuerzo de los ancianos) le significa al jefe perder 10 votos. Irse a otro lugar, le hace perder 30 votos. Si la tribu se establece en un lugar bueno el jefe gana 270 votos, mientras que si se establece en un lugar malo pierde 80.

   a) ¿Cuál es la política óptima?.

   b) ¿Cuántos votos está dispuesto a sacrificar el jefe por tener certeza absoluta de la calidad de los terrenos?.

3. Suponga que ha decidido iniciarse en el negocio forestal plantando eucaliptus. La madera puede ser utilizada para hacer listones, o bien, para ser vendida para producir celulosa. Ud. puede elegir qué variedad de árboles plantar: e_1 que es mejor como madera, o e_2 que es mejor como pulpa para celulosa. El precio de la celulosa al momento de la tala de los árboles (en 20 años más) puede ser alto *lo que ocurre con probabilidad 0.4* o bajo, *lo que ocurre con probabilidad 0.6*.

   Los ingresos por hectárea sembrada de c/u de las combinaciones de acciones se muestran en la siguiente tabla:

	Madera	P_{Cel} Alto	P_{Cel} Bajo
e_1	1000	600	100
e_2	700	1500	200

a) ¿Cuánto es lo máximo que puedo llegar a ganar en este negocio?. Si tomo la mejor decisión (sobre la variedad a plantar) dada la información disponible, ¿Cuál es el valor esperado de mis ganancias?.

b) ¿Cuánto estaría dispuesto a pagar por saber con seguridad el precio de la celulosa?.

c) Una adivina se ofrece para predecir el precio que tendrá la celulosa en el futuro, de manera que la probabilidad que el precio sea alto dado que me vaticinó precios altos es 0.9 y la probabilidad que el precio sea bajo dado que pronosticó precios bajos es de 0.8, ¿Cuánto es lo máximo que le pagaría a la adivina por la información?.

4. Un atribulado alumno debe decidir si estudiar o no para un examen. Si estudia, sacrificará un tiempo equivalente a 1.9 ptos. (tiempo que puede dedicar a otros ramos). Conociendo sus capacidades, y dada su experiencia sabe que si estudia y el control está fácil se va a sacar un 6.5, pero si estudia y el control tiene una dificultad mediano o difícil se sacaría un 5.0 o un 2.0 respectivamente. Por otra parte si no estudia y el control está fácil, mediano o difícil se sacaría un 4.5, 2.5, y un 1.5 respectivamente.

   De acuerdo a la historia del curso hay un 30 % de probabilidades que el control esté fácil, un 50 % que esté mediano y un 20 % que esté difícil.
   Por otro lado se sabe que el profesor acostumbra a dar cierta información sobre la dificultad del control, la clase antes de éste. Sin embargo, esta información no es perfecta y su confiabilidad se puede describir por la siguiente tabla:

	Fácil	Mediano	Difícil
Dice fácil	0.8	0.2	0.1
Dice mediano	0.1	0.7	0.3
Dice difícil	0.1	0.1	0.6

   a) Proponga y resuelva el árbol de decisión que se plantea al estudiante.

   b) Calcule el valor esperado de la información perfecta.

5. Considere un juego en el cual existen dos cofres. Uno de ellos contiene tres monedas de oro y el otro contiene una moneda de oro y dos de plata. Se nos permite abrir un cofre y quedarnos con el premio, que se valora de la siguiente forma: cada moneda de oro vale $500 y cada moneda de plata vale $100. Antes de elegir un cofre, nosotros podemos pagar de nuestro bolsillo $200 y sacar una moneda en forma aleatoria de alguno de los dos cofres (por ejemplo, podríamos sacar una moneda de oro del cofre 1). Determine si es conveniente pagar los $200 por tener esa información adicional antes de jugar. ¿Cúal es el valor de la información perfecta?. ¿Cúal es el valor esperado del juego?.

6. (*) El gobierno está evaluando el realizar una campaña masiva de vacunación contra la influenza. Se sabe que el 30 % de la población ya tiene anticuerpos y por lo tanto independientemente si se vacuna o no, no contraerá la enfermedad. El 70 % restante no tiene anticuerpos y se sabe que con una probabilidad de 0.5 contraerá la enfermedad. El costo social percibido por el gobierno, por persona que contrae la enfermedad es de $100 (tratamiento, horas de trabajo perdidas, etc.). Si una persona se vacuna la probabilidad que se enferme es cero.

   a) ¿Cuál es el precio máximo que el gobierno estaría dispuesto a pagar por la vacuna de manera que la mejor opción sea vacunar a toda la población (independientemente de si tiene o no anticuerpos)?.

   Se sabe que el precio de la vacuna es de $40. Además de las opciones de no vacunar o vacunar a toda la población, al gobierno se le ha presentado una nueva alternativa: el laboratorio que distribuye la vacuna puede hacer un test de sangre rápido justo antes de colocar la vacuna para detectar a aquellas persona que ya tienen el anticuerpo. Se sabe que con probabilidad de 0.1 el test indica que la persona no tiene el anticuerpo cuando en realidad lo tiene. Por otra parte, se sabe que cuando la persona no tiene el anticuerpo existe una probabilidad p de que el test salga positivo, es decir, el test diga que sí tiene el anticuerpo.

b) Determine para que valores de p es conveniente realizar el test de sangre previo a la decisión individual de vacunación. ¿Es conveniente sólo vacunar a aquellos cuyo test indica que no tienen el anticuerpo?.

c) ¿Cómo cambia su respuesta anterior si el costo de la vacuna es de \$50?.

7. (*) El año 2012 el equipo A tiene que jugar la final de la Copa Libertadores contra el equipo B, con la modalidad de 2 partidos. Es decir, el equipo con más puntos después de 2 partidos gana la copa. El equipo que gana un partido obtiene 3 ptos., si empata obtiene 1, y si pierde 0.

Si después de estos 2 partidos los equipos se encuentran empatados se seguirán disputando encuentros hasta que alguno de los 2 gane y se lleve la copa.

El técnico del equipo A, antes de cada partido puede decidir jugar con un esquema ofensivo o con un esquema defensivo. Si juega con el esquema ofensivo la probabilidad de ganar es 0,45 y la de perder 0,55. Por otra parte si juega con el esquema defensivo empatará con una probabilidad 0,9 y con una probabilidad 0,1 perderá el encuentro.

a) ¿Cuál es la probabilidad que el equipo A gane la copa?. Determine y explique la estrategia óptima para este equipo.

b) ¿Cuál equipo tiene la mayor probabilidad de ganar la copa?. Explique de manera cualitativa el origen de la ventaja que tiene este equipo.

8. (*) Una deportista, pocos días antes de un importante campeonato, ha comenzado a sentir algunas molestias en su espalda. Su médico le explica que mucha gente siente dichas molestias, y que muchas veces (una fracción p de los casos) no significan nada. Sin embargo hay ocasiones (una fracción $(1-p)$ de los afectados) en que corresponden a un serio problema en el sistema nervioso. $(0 < p < 1)$.

Nuestra deportista podría someterse a un tratamiento preventivo, el cual, tenga o no el problema, la dejará sana. Sin embargo para realizar el tratamiento tendría que abstenerse de participar del campeonato. A esta alternativa ella le asigna una utilidad de 0 (la cual considera el disgusto por no participar del campeonato, el costo del tratamiento, etc.).

Alternativamente ella podría competir en el campeonato. El riesgo de ello radica en que, si sus molestias son efectivamente síntoma de un problema en el sistema nervioso, al terminar el campeonato estará mucho peor, y deberá realizar un tratamiento más prolongado, absteniéndose de participar en muchos otros torneos. Esa situación le reportaría una utilidad de -5000. Por otro lado, si sus molestias no significan nada, para el final del campeonato se habrán desvanecido, y el haber participado le reporta una utilidad esperada de 1000.

El objetivo de nuestra deportista es maximizar su utilidad esperada.

a) Modele el problema que enfrenta esta deportista mediante un árbol de decisión. Indique la decisión óptima y la utilidad esperada, como función de p, $B_0(p)$.

Suponga ahora que ella puede realizarse un examen, de manera de tomar una decisión más informada. Si las molestias no significan nada, el examen arrojará con seguridad un resultado negativo. Ahora, si en realidad las molestias son consecuencia de un problema en el sistema nervioso, el examen arrojará un resultado positivo con probabilidad β (y negativo con probabilidad $(1-\beta)$). Realizarse el examen le produce una desutilidad de C (tanto por el costo monetario del examen como por lo desagradable que resulta efectuarlo).

b) Modele nuevamente el problema que enfrenta la deportista mediante un árbol de decisión. Escriba la regla de decisión óptima y calcule la utilidad esperada como función de p, β y C, $B_1(p, \beta, C)$. Suponga $p > 5/6$

Suponga ahora que existen 2 exámenes distintos, ambos con características similares al del punto anterior, pero con distintos valores para los parámetros. El Examen 1 tiene una probabilidad $\beta_1 > 0$ de detectar el problema en caso que éste realmente exista, y aplicarlo produce una desutilidad $C_1 = 0$. Aplicar el Examen 2 produce una desutilidad $C_2 > 0$. Si el problema efectivamente existe el Examen 2 tiene una probabilidad $\beta_2 > 0$ de arrojar un resultado positivo, independiente de cual sea el resultado del Examen 1.

Nuestra deportista puede, en cualquier momento, decidir someterse a cualquiera de los exámenes (sin importar si ya se sometió o no al otro). Aplicar *un mismo* examen más de una vez no aporta más información, pues el resultado será siempre el mismo.

c) El Examen 1, ¿Será utilizado con seguridad?.

d) Modele nuevamente el problema que enfrenta la deportista mediante un árbol de decisión. Suponga $p > 5/6$. Para no replicar trabajo ya realizado haga (correcto) uso de la función $B_1(\cdot,\cdot,\cdot)$ donde corresponda. Escriba la regla de decisión óptima como función de C_2.

9. Los directivos de un conocido club internacional de fútbol deben decidir si contratar o no a Sebastián, un jugador del equipo de fútbol local, y en caso de decidir contratarlo, si será por una temporada o por dos. Si el contrato es por un año, al final de éste, el equipo tiene la opción de renovar con Sebastián por otra temporada. Sin embargo, el costo de renovar con Sebastián, dependerá de su desempeño durante el primer año. Por otro lado, si el contrato es por dos años, se incurre una sola vez en el costo, sin importar el desempeño que en el futuro tendrá Sebastián. La estructura de costos por contar con este jugador es la siguiente:

- Contrato por por un año cuesta 4 u.m.
- Renovación por un segundo año, si en la primera temporada Sebastián tuvo un buen desempeño, por un valor de 4.5 u.m.
- Renovación por un segundo año, si en la primera temporada Sebastián tuvo un mal desempeño, por un valor de 3.5 u.m.
- Contrato por dos años equivale a 8 u.m.

Además, el club estima sus ingresos por la participación del jugador en 6 u.m por cada temporada buena de Sebastián, y en 2 u.m., por cada temporada mala. Para tomar la decisión, los directivos del club cuentan con datos de la trayectoria del goleador, a partir de los cuales han estimado las siguientes probabilidades:

- La probabilidad que la segunda temporada de Sebastián sea buena es 13/20.
- La probabilidad que la primera temporada sea buena, dado que la segunda será buena es de 12/13.
- La probabilidad que la primera temporada sea mala, dado que la segunda será mala es de 3/7.

a) Formule el árbol de decisión y encuentre la estrategia óptima de la directiva de este club.

b) Suponga, ahora, que Sebastián sólo aceptará un contrato por dos años, pero permitirá a la directiva del club someterlo a un examen que con un 90 % de confianza predecirá el desempeño de Sebastián en el primer año de contrato. Determine el máximo valor del examen por el cual el club estaría dispuesto a pagar.

10. Plumatón es un pueblo cuya principal actividad económica es la producción agrícola. Los pollo nacen a partir de los huevos los cuales deben mantenerse durante 4 semanas en una incubadora, la que utiliza una ampolleta infrarroja para mantener la temperatura adecuada. En el mercado se ofrecen ampolletas corrientes, las cuales tienen una vida útil de 2 semanas, a un precio de A [\$]. Los avicultores deben comprar 2 ampolletas para una incubadora y realizar un reemplazo planificado en la mitad del período de gestación de las aves.

La empresa AINTSA ha desarrollado una nueva tecnología para las ampolletas, lo que permite tener ALD (ampolletas de larga duración). Una ALD está preparada para operar durante 4 semanas, lamentablemente una pequeña fracción de las ALD presenta imperfecciones que reducen su vida a sólo 2 semanas, como una ampolleta corriente. La probabilidad que una ALD sea perfecta (dure las 4 semanas) es q, y no es posible detectar de antemano si una ALD es perfecta o no. Si un avicultor compra una ALD y ésta falla, deberá hacer un reemplazo no planificado, lo cual tiene un costo de U [$] adicionales al costo de la ampolleta corriente que debe comprar para realizar el reemplazo.

AINTSA debe poner en los embalajes de las ALD una leyenda indicando a sus clientes la probabilidad de que el producto dure 2 o 4 semanas.

a) Suponiendo que los productores son neutrales al riesgo (y por ende buscan minimizar el costo esperado para el período de incubación de los huevos), determine el máximo precio P que un avicultor estaría dispuesto a pagar por una ALD cuya probabilidad de ser perfecta es q.

AINTSA puede someter a las ALD producidas a un test, el que tiene un costo de C [$]por cada ampolleta testeada. Una ALD sometida al test puede salir *aceptada* (en cuyo caso será vendida como ALD, o *rechazada* (caso en el cual será vendida como ampolleta corriente). Una ALD perfecta será aceptada con seguridad, mientras que una ALD imperfecta será rechazada con probabilidad $\gamma \quad (1/2 < \gamma < 1)$

b) ¿Qué leyenda pondría AINTSA en el embalaje de una ALD que ha sido aceptada en el test?.

c) Determine, en función de q si a AINTSA le conviene o no someter al test a las ampolletas producidas. Considere que $2C < U < A$.

d) La realidad es que la probabilidad q no es fija, sino que depende del grado de control que se ponga en el proceso productivo. Por supuesto, mientras mayor sea el control, mayores serán los costos. Para conseguir que una ALD producida tenga una probabilidad q de ser perfecta se debe incurrir en un costo de producción de $g(q)$ [$/unidad]. Formule el problema que debe resolver AINTSA para decidir su política de producción (calidad q de las ALD que produce y realización o no del test).

11. Una empresa de inversiones a puesto en el mercado un nuevo producto y Ud. está evaluando la posibilidad de invertir en él. Este producto consiste en que la empresa de inversiones vende un documento que le permitirá a quien lo posea tener la opción de comprar una acción de la Compañía A&N en su precio actual, en 2 períodos más.

Ud. sabe que esta acción tiene un precio muy variable, pudiendo subir o bajar en un 50 % cada período, y que actualmente está valorada en $80. Para hacer más atractiva la compra de este nuevo producto la empresa de inversiones permite que el dueño de un documento se lo devuelva recibiendo la mitad de lo que le costó, es decir, el comprador de un documento no puede perder más de la mitad de su inversión inicial.

Ocupando árboles de decisión y suponiendo que todos los actores del mercado utilizan el criterio del valor esperado, conteste las siguientes preguntas:

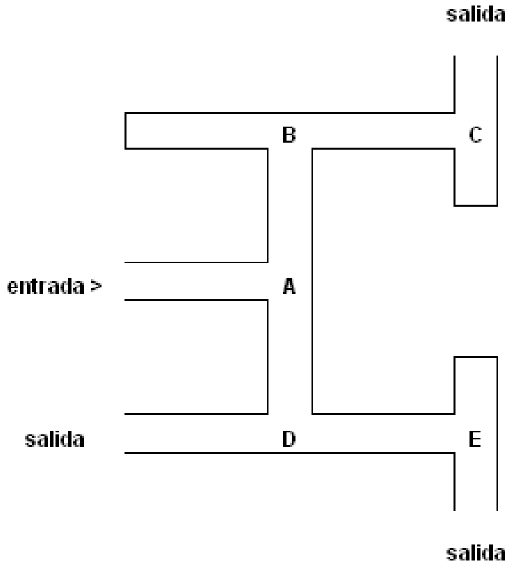
a) ¿Cuál es la probabilidad de que las acciones de la compañía suban en 1 período?.

b) Suponiendo que la probabilidad de la parte anterior es p encuentre el máximo precio que Ud. estaría dispuesto a pagar por este documento.

c) Suponga que Ud. tiene un amigo que, ocupando un sofisticado y único método matemático puede darle información acerca del comportamiento de las acciones del mercado con una certeza del 80 %. ¿Cuánto estaría dispuesto a pagarle a su amigo para que pronostique si las acciones de A&N van a subir o bajar el próximo período? (para esta parte suponga que $p = 1/2$).

12. (*) Un grupo de científicos está estudiando el comportamiento de un nuevo robot, llamado TONGOIC. Para ello han diseñado el laberinto que se muestra en la figura.

Se sabe que TONGOIC nunca retrocede y cada vez que se encuentra frente a un intersección puede doblar a la derecha o a la izquierda. En el laberinto hay sólo 5 intersecciones : A, B, C, D y E. Si en su recorrido el robot se encuentra con un callejón sin salida, entonces se detiene y se autodestruye.



Laberinto de TONGOIC

Después de numerosos ensayos los investigadores han determinado lo siguiente:

La probabilidad de que el robot salga del laberinto es 0.6

El 80 % de las veces TONGOIC escogió doblar a la derecha en su segunda intersección. (esto no significa que la probabilidad de doblar a la derecha en B es igual a la probabilidad de doblar a la derecha en D y ambas valen 0,8).

De encontrarse en las intersecciones de C o E, el robot repetirá su conducta de la intersección anterior (B o D)con probabilidad 0.7.

El 40 % de las veces TONGOIC escogió doblar a la izquierda en la intersección A.

Uno de los científicos del grupo, asegura tener una teoría que explica el comportamiento del robot. Tan seguro está de sus descubrimientos que está dispuesto a apostar C [$] a que TONGOIC se autodestruirá.

Conteste las siguientes preguntas utilizando el criterio de maximizar el valor esperado.

a) Si usted ha estado presente en el laboratorio y cuenta con la misma información que todos los científicos, ¿Acepta o no la apuesta? (si usted pierde deberá cancelar C [$]).

b) Construya un árbol de decisión que le permita decidir cuanto estaría dispuesto a pagar por retrasar la decisión de apostar después de conocer el comportamiento del robot en A. Determine explícitamente el valor de esta opción.

c) El mago Armijo Catalan está dispuesto a cobrarle X [$] por decirle exactamente cual será el comportamiento del TONGOIC en la segunda intersección, es decir, si eligirá la derecha o la izquierda. ¿Cuánto es lo máximo que estaría dispuesto a pagar por esta información?.

13. (*) La empresa AnBlack ha decidido quitar la representación de sus productos a la compañía distribuidora de Gville, por los malos resultados mostrados en los últimos años. Para esto puede llegar a un acuerdo extrajudicial, pagando una indemnización de \$50.000 a la distribuidora, o bien ir a los tribunales de justicia.

En caso de ir a un juicio, AnBlack sabe que la decisión de los jueces será completamente al azar, pero que con un 70 % de probabilidad ganará el juicio y no deberá pagarle nada a la distribuidora. Sin embargo, en caso de perder deberá indemnizar a esta compañía en un monto aleatorio distribuido según una variable uniforme entre \$40.000 y \$360.000.

Para apoyar su decisión, AnBlack puede contratar los servicios de una consultora experta en contratos de representación comercial, la que predice el resultado de un eventual juicio. Los registros históricos indican que el 90 % de las veces en que la consultora predijo un triunfo efectivamente los tribunales concedieron la victoria, mientras que en el 70 % de las veces en que la consultora predijo una derrota ésta finalmente se produjo.

a) Si AnBlack es neutral al riesgo y decide NO contratar a la consultora, ¿Cuál será la estrategia óptima y la cantidad de dinero esperada que deberá desembolsar AnBlack para terminar su contrato de representación en Gville?.

b) Si AnBlack es neutral al riesgo, ¿Cuánto es lo máximo que estará dispuesto a pagar a la consultora por predecir el resultado del juicio?.

c) Comente la siguiente afirmación: "Dada la estructura del problema es imposible que tanto AnBlack como la distribuidora de Gville sean neutrales al riesgo".

Suponga que AnBlack descubre que el dueño de la distribuidora de Gville no es neutral al riesgo y que su función de utilidad queda bien representada por $\mathcal{U}(x) = \sqrt{x}$, donde x es la cantidad ganada por finalizar el contrato. Además suponga que es de conocimiento común que AnBlack puede conseguir que la consultora prediga el resultado de un eventual juicio al precio encontrado en la parte (b), y que la predicción de la consultora sólo la conocerá quien ordene el estudio.

d) En esta situación, ¿Es posible que AnBlack pueda mejorar los términos del acuerdo extrajudicial?. Calcule el monto que deberá desembolsar AnBlack para terminar con el contrato.

2. Resolución Problemas de Árboles de Decisión

■ **1.** *a*) Para desarrollar el problema necesitamos conocer ciertas probabilidades. Sean:

T+	=	Test indica pieza mala.
T-	=	Test indica pieza buena.
P	=	Parar de producir.
NP	=	continuar la producción.
A	=	Empresa tipo A.
B	=	Empresa tipo B.

De esta forma se tiene que:

$$\begin{aligned} P[T+|A] &= 0{,}02 = 1 - P[T-|A] \\ P[T+|B] &= 0{,}2 = 1 - P[T-|B] \\ P[T+] &= P[T+|A]\cdot P[A] + P[T+|B]\cdot P[B] \\ &= 0{,}02\cdot 0{,}9 + 0{,}2\cdot 0{,}1 \\ &= 0{,}038 \\ \Rightarrow P[T-] &= 0{,}962 \end{aligned}$$

Además:

$$P[A|T+] = \frac{P[T+|A]P[A]}{P[T+]} = \frac{0{,}018}{0{,}038} = 0,4736 = 1 - P[B|T+]$$

$$P[A|T-] = \frac{P[T-|A]P[A]}{P[T-]} = \frac{0{,}882}{0{,}962} = 0,916 = 1 - P[B|T-]$$

El árbol de decisión asociado se muestra en la figura 1.

Noten que conviene realizar el test.

b) La idea es exactamente la misma, solamente que debemos calcular las siguientes probabilidades:

$$\begin{aligned} P[T++] &= 0{,}0004\cdot 0{,}9 + 0{,}04\cdot 0{,}1 = 0{,}00436 \\ P[T--] &= 0{,}978\cdot 0,9 + 0{,}64\cdot 0{,}1 = 0{,}9442 \\ P[T+-] &= 0{,}0541 \\ P[A|T++] &= \frac{0{,}0004\cdot 0{,}9}{0{,}00436} = 0{,}0825 == 1 - P[B|T++] \\ P[A|T--] &= \frac{0{,}978\cdot 0{,}9}{0{,}9442} = 0{,}9322 == 1 - P[B|T--] \\ P[A|T+-] &= \frac{(2\cdot 0{,}98\cdot 0{,}02)\cdot 0{,}9}{0{,}0541} = 0{,}6521 = 1 - P[B|T+-] \end{aligned}$$

El árbol de decisión asociado se muestra en la figura 2.

Notar que esta vez no conviene realizar el test.

c) Para ver cual es el valor de la información perfecta considere un test que clasifica correctamente a las empresas y cuyo valor es X. El árbol de decisión asociado se muestra en la figura 3.

Entonces el valor de este test especial será 39.49.

■ **6.** *a*) De la figura 4 se ve que el precio máximo es $v = 35$.

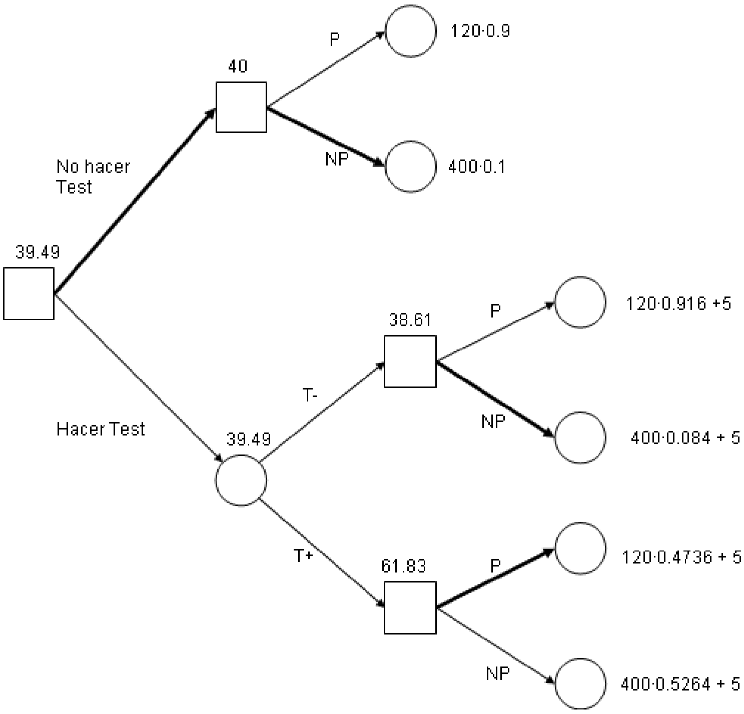


Figura 1: Arbol problema 1-1

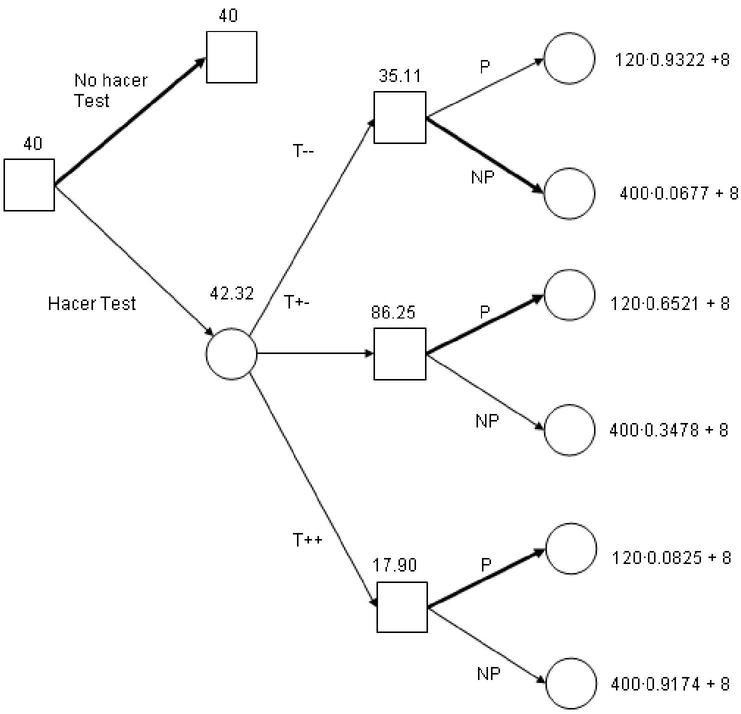


Figura 2: Arbol problema 1-2

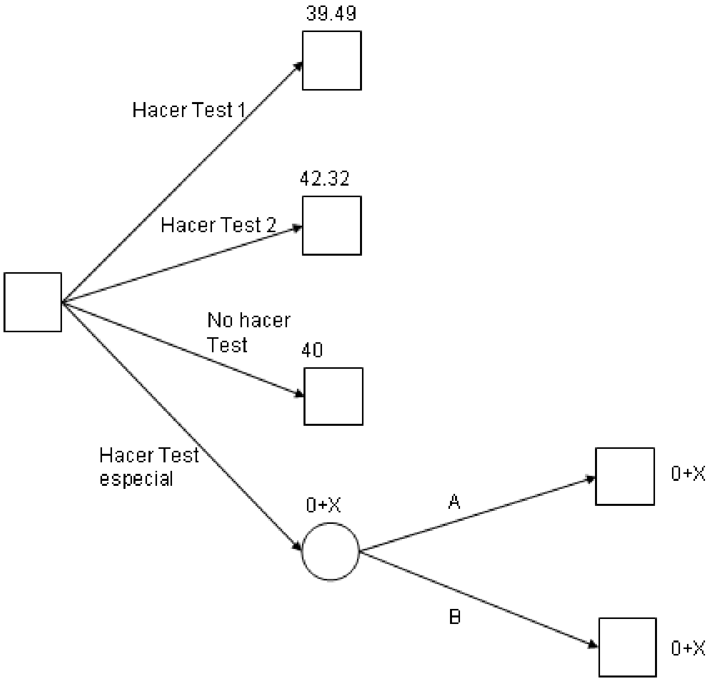


Figura 3: Arbol problema 1-3

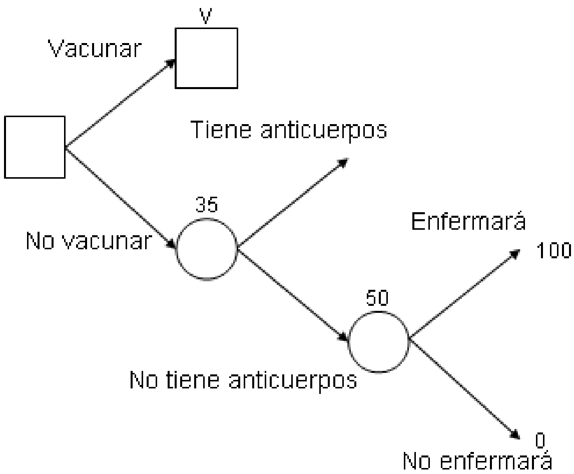


Figura 4: Arbol problema 6-1

b) Sean:

A	=	Persona con anticuerpos.
S	=	Persona sin anticuerpos.
TA	=	Test dice persona tiene anticuerpos.
TS	=	Test dice persona no tiene anticuerpos.

Entonces lo que se nos entrega en el enunciado es:

$$\begin{array}{rcl} P[A] &=& 0{,}3 \\ P[TS|A] &=& 0{,}1 \\ P[TS|S] &=& 1-p \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} P[S] &=& 0{,}7 \\ P[TA|A] &=& 0{,}9 \\ P[TA|S] &=& p \end{array}$$

Entonces, utilizando probabilidades totales se puede ver que:

$$P[TA] = P[TA|A]\cdot P[A] + P[TA|S]\cdot P[S] = 0{,}7p + 0{,}27 = 1 - P[TS]$$

Por otro lado tendremos que:

$$P[S|TS] = \frac{P[TS|S]\cdot P[S]}{P[TS]} = \frac{0{,}7 - 0{,}7p}{0{,}73 - 0{,}7p} = 1 - P[A|TS]$$

$$P[S|TA] = \frac{P[TA|S]\cdot P[S]}{P[TS]} = \frac{0{,}27}{0{,}27 + 0{,}7p} = 1 - P[A|TA]$$

El árbol resultante se muestra en la figura 5.

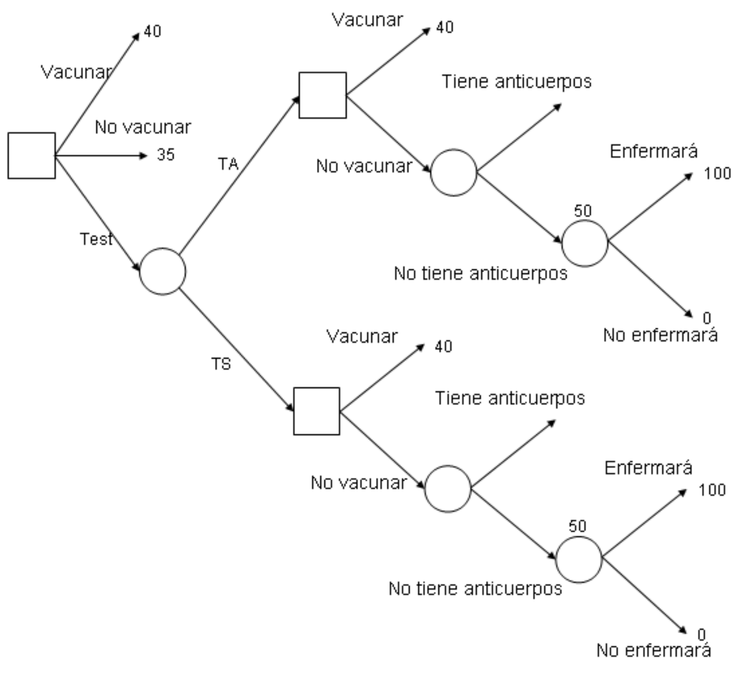


Figura 5: Arbol problema 6-2

Donde:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{35p}{0{,}27 + 0{,}7p} < 40 \Rightarrow p < \frac{10{,}8}{7} \\
\beta &= \frac{35 - 35p}{0{,}73 - 0{,}7p} > 40 \Rightarrow p < 0{,}829 \\
\delta &= 35p + (0{,}73 - 0{,}7p) \cdot 40
\end{aligned}$$

c) Propuesto

■ **7.** *a*) Lo primero es notar que los puntos no tienen nada que ver en la probabilidad de ganar la copa. Las decisiones que el técnico del equipo A puede tomar antes de empezar un partido es la manera en que va a jugar, y debe considerar que, a priori, las formas que el equipo A salga campeón son:

- Gane el primero y empate o gane el segundo
- Gane el primero, pierda el segundo y gane el definitorio
- Pierda el primero, gane el segundo y gane el definitorio
- Empate el primero y gane el segundo

El árbol de decisión asociado se muestra en la figura 6

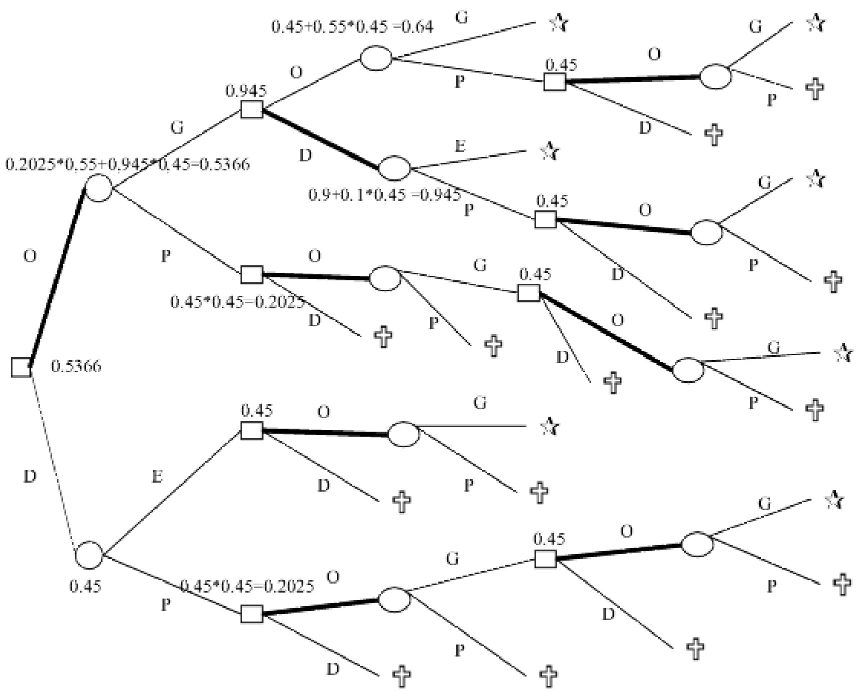


Figura 6: Arbol problema 7

Notación:

- D = Jugar el partido defensivamente, O = Jugar el partido ofensivamente
- G = Ganar 1 partido, E = Empatar 1 partido, P = Perder 1 partido

Notar que si después de los 2 primeros partidos están empatados, al equipo 1 no le conviene elegir la estrategia defensiva, puesto que por esa vía no puede ganar la copa y con probabilidad < 1 sólo estará igual después de finalizar el encuentro (o empata o pierde). De esta manera lo que en un principio parecía un árbol infinito no le es.

De esta manera vemos que la estrategia óptima es salir jugando a la ofensiva, después si el equipo A gana, basta el empate para ganar la copa. Por otra parte, si pierde, sólo le sirve un triunfo para poder ganar la copa.

Si parte jugando a la defensiva, lo mejor que puede pasar es que empate y luego necesita un triunfo, y con esta estrategia tiene una menor probabilidad de ganar.

b) Curiosamente, el equipo con mayor probabilidad de ganar es el A, a pesar de ser peor que B (lo cual puede observarse en que la probabilidad de ganar 1 partido es menor para el equipo A con ambas estrategias). Esto se debe a que el equipo A tiene la opción de elegir cómo jugar después de conocer el resultado de cada partido. Poder adecuar su estrategia es lo que le da la ventaja.

■ **8.** *a*) El árbol de decisión asociado a este problema es el que se muestra en la figura 7.

La opción del tratamiento preventivo entrega una ganancia segura de 0(u.m.). Por otro lado la opción de jugar entrega una utilidad esperada de $6000p - 5000(u.m.)$. Es así como la estrategia óptima será la que reporte una mayor utilidad (esperada). Entonces se tendrá que:

$$B_0(p) = (6000p - 5000)^+$$

b) Para desarrollar este punto necesitamos conocer ciertas probabilidades. Sean:

T+	=	Test positivo.
T-	=	Test negativo.
E	=	Enfermo.
NE	=	No enfermo.

Entonces:

$$P[T + |NE] = 0 = 1 - P[T - |NE]$$

$$P[T + |E] = \beta = 1 - P[T - |E]$$

Entonces mediante probabilidades totales:

$$P[T+] = \beta(1 - p) = 1 - P[T-]$$

Entonces, aplicando Bayes:

$$P[E|T+] = 1 = 1 - P[NE|T+]$$

$$P[E|T-] = \frac{(1-\beta)(1-p)}{(1-\beta)(1-p)+p} = 1 - P[NE|T-]$$

De acuerdo a esto el árbol de decisión es el que se muestra en la figura 8.

Entonces se tiene que la utilidad esperada en el caso de hacer el test será:

$$E[\text{U Hacer test}] = (1 - \beta(1-p))B_0\left[1 - \frac{(1-\beta)(1-p)}{(1-\beta)(1-p)+p}\right] + \beta(1-p)B_0[0]) - C$$

Entonces el valor de la estrategia óptima será:

$$B_1(p, \beta, C) = \text{máx}\left\{(1 - \beta(1-p))B_0\left[1 - \frac{(1-\beta)(1-p)}{(1-\beta)(1-p)+p}\right] + \beta(1-p)B_0[0]) - C, B_0(p)\right\}$$

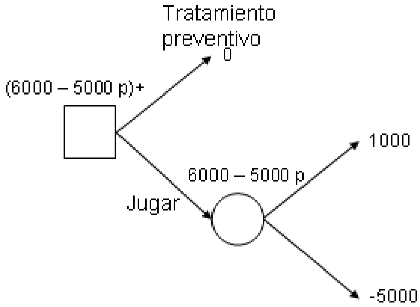


Figura 7: Arbol problema 8-1

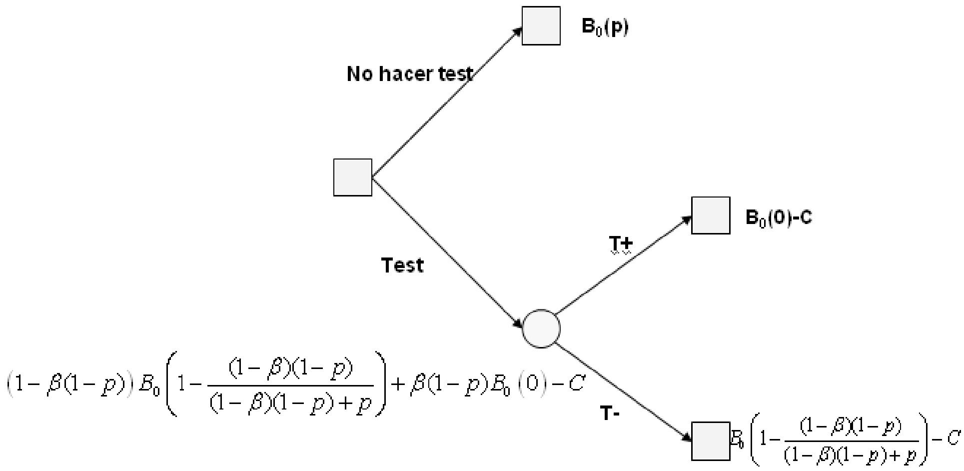


Figura 8: Arbol Problema 8-2

Sin embargo, si asumimos que $p > \frac{5}{6}$ entonces, dado que:

$$\begin{aligned} B_0(p) &= 1000(6p-5) \quad \text{si} \quad p > \frac{5}{6} \\ B_0(p) &= 0 \quad\quad\quad\quad\quad\; \text{si} \quad p \leq \frac{5}{6} \end{aligned}$$

Se tendrá que:

$$B_1(p,\beta,C) = \text{máx}\left\{(1-\beta(1-p))1000\left[6 - 6\frac{(1-\beta)(1-p)}{(1-\beta)(1-p)+p} - 5\right] + -C, 1000(6p-5)\right\}$$

c) El test 1 siempre será utilizado, dado que su costo es 0. Esto es porque aunque no entregue información adicional (cosa que sí hace puesto que si entrega un resultado positivo, con seguridad sabemos que la persona está enferma) el hecho que no cueste dinero, a lo más deja el problema invariante.

d) Es importante notar que, dado que siempre se utiliza el test 1, el problema comienza con los resultados de éste, y los problemas que se enfrentan luego de los resultados, son los mismos enfrentados en la parte anterior pero considerando otra probabilidad de enfermedad inicial.

De esta forma la utilidad esperada será:

$$E[U] = B_1(0, \beta_2, C_2) \cdot \beta_1(1-p) + B_1(1 - \frac{(1-\beta_1)(1-p)}{(1-\beta_1)(1-p)+p}, \beta_2, C_2) \cdot 1 - (\beta_1(1-p))$$

■ **12.** *a*) Si acepto la apuesta recibiré $C\$$ y si pierdo tendré que pagar la misma cantidad. Por otro lado si no acepto la apuesta no ganaré ni perderé dinero. No es necesario hacer una árbol de decisión para ver que si acepto la apuesta. La utilidad esperada de será es :

$$\begin{aligned} E[\text{Utilidad}] &= C\$ \cdot P[\text{Ganar}] - C\$ \cdot P[\text{Perder}] \\ &= C\$[P[\text{Robot Sale}] - P[\text{Robot no Sale}]] \\ &= C\$(0{,}6 - 0{,}4) \\ &= 0{,}2 \cdot C\$ \end{aligned}$$

Entonces dado que la cantidad C es positiva y que el beneficio de no apostar es 0, claramente se aceptará la apuesta.

b) La gracia de esta parte es que si pagamos una cantidad Y podremos ver que camino toma el robot (en A) y luego decidir si apostamos o no. Sin embargo antes de desarrollar el árbol necesitamos conocer algunas probabilidades. De acuerdo a esto definiremos la siguiente notación:

AD	=	Doblar a la derecha en A	DD	=	Doblar a la derecha en D
AI	=	Doblar a la izquierda en A	DI	=	Doblar a la izquierda en D
BD	=	Doblar a la derecha en B	ED	=	Doblar a la derecha en E
BI	=	Doblar a la izquierda en B	EI	=	Doblar a la izquierda en E
CD	=	Doblar a la derecha en C	i	=	llegar a i (i=A,B,...,E)
CI	=	Doblar a la izquierda en C			

Entonces, en función de esta notación, tenemos que el enunciado nos entrega la siguiente información:

$$\begin{aligned} P[AD|A] &= 0{,}6 = 1 - P[AI|A] \\ 0{,}8 &= P[BD|B] \cdot P[B] + P[DD|D] \cdot P[D] \\ &= P[BD|B] \cdot 0{,}4 + P[DD|D] \cdot 0{,}6 \\ P[CI|C] &= 0{,}3 = 1 - P[CD|C] \\ P[ED|E] &= 0{,}3 = 1 - P[EI|E] \\ P[A] &= 1 \\ P[B] &= P[AI|A] \\ &= 0{,}4 = 1 - P[D] \\ P[C] &= P[BD|B] \cdot P[B] \\ &= P[BD|B] \cdot 0{,}4 \\ P[E] &= P[DI|D] \cdot P[D] \\ &= P[DI|D] \cdot 0{,}6 \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} 0{,}6 &= P[CI|C]\cdot P[C] + P[DD|D]\cdot P[D] + P[ED|E]\cdot P[E] \\ 0{,}6 &= 0{,}3\cdot P[BD|B]\cdot 0{,}4 + 0{,}6\cdot P[DD|D] + 0{,}3\cdot 0{,}6\cdot 1 - P[DD|D] \end{aligned} \tag{1}$$

Ahora, resolviendo el sistema de ecuaciones formado por (1) y (2) encontramos que:

$$\begin{aligned} P[BD|B] &= 0{,}875 \\ P[DD|D] &= 0{,}750 \end{aligned}$$

De acuerdo a esto y utilizando las probabilidades recién calculadas, el árbol asociado al problema es el que se muestra en la figura 9 (ojo que consideramos $C = \$10{,}000$).

Entonces la estrategia óptima en este caso es:
Si en A el robot se va a la izquierda NO APOSTAR .
Si en A el robot va a la derecha APOSTAR.
De la figura 9 se desprende que el valor esperado de esta política es : \$3.900, luego lo máximo que estaría dispuesto a pagar es:
3.900 - 2.000 = \$1.900

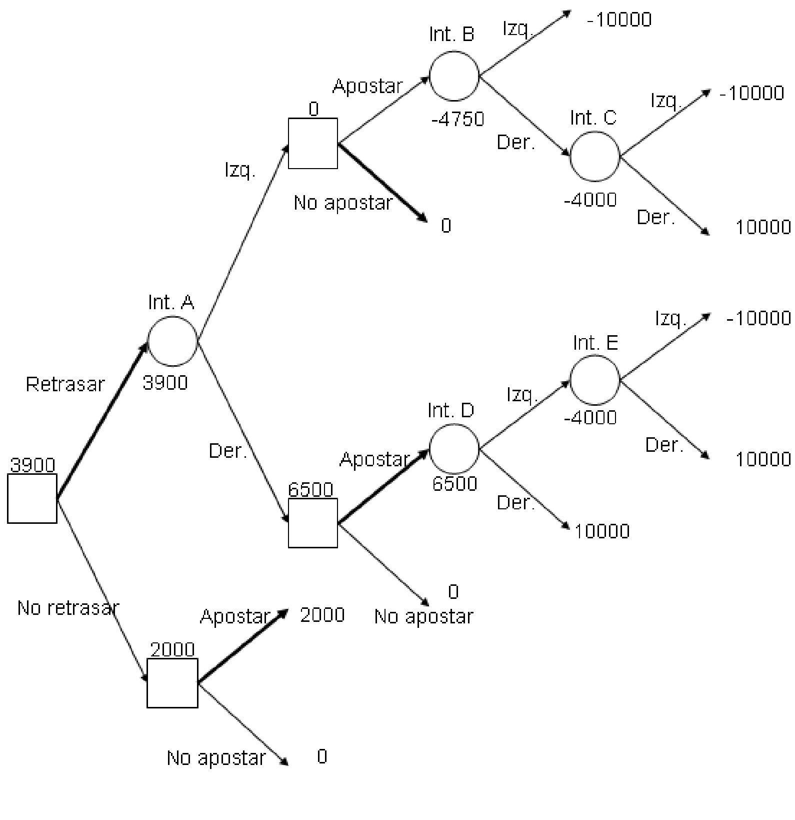


Figura 9: Arbol problema 12-1

c) Sea MD= Mago dice derecha y MI= Mago dice izquierda.
Dado que el mago entrega información perfecta, se tendrá que:

$$\begin{aligned} P[\text{Doble derecha en 2 intersección}|MD] &= 1 \\ &= P[\text{Doble izquierda en segunda intersección}|MI] \end{aligned}$$

Para desarrollar esta parte necesitamos calcular la siguiente probabilidad:

$$\begin{aligned} 0{,}8 = P[\text{Derecha segunda intersección}] &= P[\text{Derecha segunda intersección}|MD] \cdot P[MD] \\ &\quad + P[\text{Derecha segunda intersección}|MI] \cdot P[MI] \\ &= 1 \cdot P[MD] + 0 \cdot (1 - P[MD]) \end{aligned}$$

De esta forma, el árbol es el que se muestra en la figura 10:

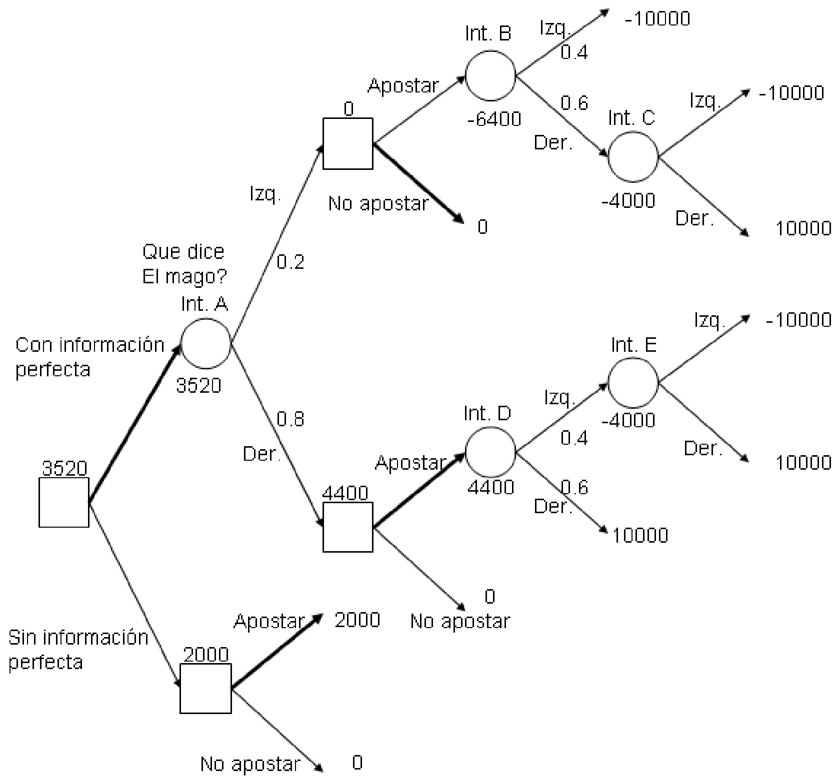


Figura 10: Arbol problema 12-2

Entonces, es directo ver que se está dispuesto a pagar $\$3520 - \$2000 = \$1520$

■ **13.** *a*) Como desea minimizar el valor esperado del dinero gastado para terminar el contrato debe evaluar llegar a un acuerdo (y gastar $50.000) o ir a un juicio, en cuyo caso la esperanza de lo que deberá desembolsar es :

$$\frac{3}{10} \cdot E\Big[U[40{,}000, 360{,}000]\Big] = \frac{3}{10} \cdot 200{,}000 = 60{,}000$$

El arbol de decisión se muestra en la figura 11.

De esta manera, la decisión óptima, si no se contrata a la consultora es aceptar el acuerdo de la distribuidora de Gayville.

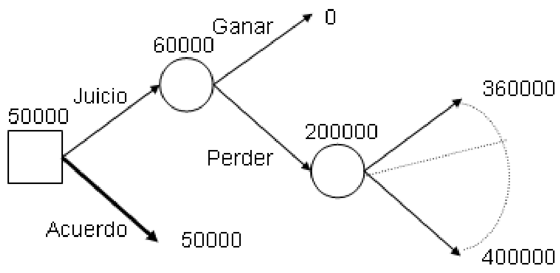


Figura 11: Arbol problema 13-1

b) Se estará dispuesto a pagar la diferencia entre la esperanza del dinero que se deberá gastar si se conoce la predicción de la consultora y nuestra mejor alternativa (que es el acuerdo con un valor de $50.000). El arbol de decisión se muestra en la figura 12.

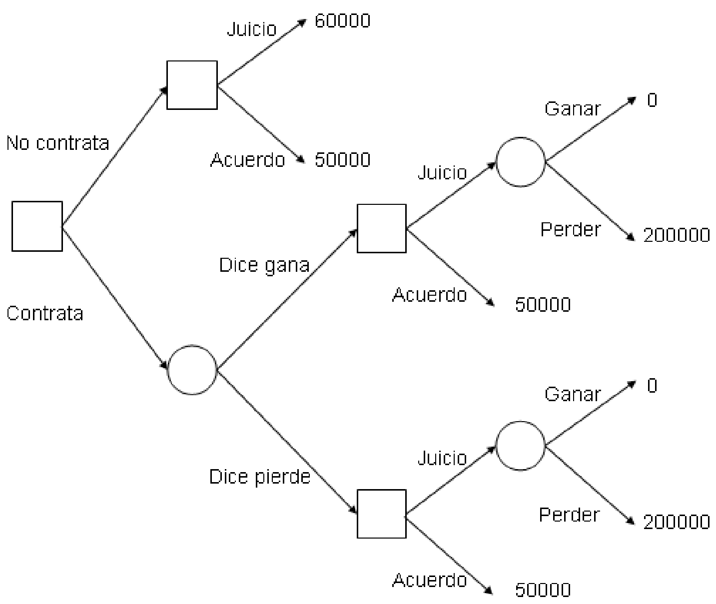


Figura 12: Arbol problema 13-2

Del enunciado:

- P[dice Gana / gana] $= 0,9$
- P[dice Gana / pierde] $= 0,3$

Ocupando Bayes y probabilidades totales se tiene que:

$$\begin{aligned}
P[\text{gana / dice Gana}] &= \frac{P[\text{dice Gana / gana}] \cdot P[\text{ganar}]}{P[\text{dice Gana}]} \\
P[\text{dice Gana}] &= P[\text{dice Gana / gana}] \cdot P[\text{ganar}] + P[\text{dice Gana / pierde}] \cdot P[\text{perder}] \\
&= 0,9 \cdot 0,7 + 0,3 \cdot 0,3 \\
P[\text{dice Gana}] &= 0,72 \\
P[\text{ganar / dice Gana}] &= \frac{63}{72}
\end{aligned}$$

De esta manera el valor esperado de ir a juicio si la consultora predice un triunfo será:

$$\frac{9}{72}200{,}000 = 25{,}000 < 50{,}000$$

En este caso la decisión óptima para AnBlack es ir al juicio. Sin embargo, si la consultora dice que van a perder, la decisión óptima continuará siendo el acuerdo, porque $P[\text{ganar / dice Pierde}] < 0,7$.

Así, el desembolso esperado en caso de contratar a la consultora será de $25{,}000 \cdot 0,72 + 50{,}000 \cdot 0,28 = 32{,}000$, por lo que lo máximo que deberíamos pagar por predecir el resultado es $50{,}000 - 32{,}000 = 18{,}000$.

c) Efectivamente, si ambas compañías fueran neutras al riesgo el valor esperado del acuerdo tendría que ser igual al valor esperado de un eventual juicio. Dada la estructura del problema podemos concluir que la distribuidora de Gayville es adversa al riesgo, y que la única manera en que AnBlack no quisiera aceptar el acuerdo extrajudicial es que tuviera una función de utilidad o criterio de decisión que valorara positivamente la incertidumbre (como Maximax).

d) Para contestar esta pregunta calcularemos la $E[\mathcal{U}]$ para el distribuidor de Gayville.

En caso de un juicio tendremos que la utilidad esperada será:

$$E[\mathcal{U}(x)] = 0,3 \cdot \int_{40000}^{360000} \frac{\sqrt{x}}{200{,}000}\, dx = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{3} \frac{100^3}{200{,}000} \cdot (6^3 - 2^3) = 208$$

De esta última expresión podemos deducir que la distribuidora de Gayville estará indiferente entre ir al juicio que a recibir $208^2 = 43{,}264$ seguros, por lo que AnBlack podría reducir en \$6.736 el valor del acuerdo extrajudicial teniendo la seguridad que Gayville lo aceptará.