

Auxiliar 1: Probabilidades

Martes 15 de Marzo de 2011

Problema 1

1. Demuestre que la distribución de probabilidad exponencial tiene pérdida de memoria.

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

2. Encuentre la distribución de probabilidad de una variable aleatoria que es la suma de variables aleatorias que siguen distribuciones de poisson independientes.
3. Demuestre que si
$$t_1 \rightarrow \exp(\lambda)$$
$$t_2 \rightarrow \exp(\mu), \quad \text{se tiene que:}$$

$$P(t_1 < t_2) = \frac{\lambda}{\mu + \lambda}$$

4. Sean $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ Variables aleatorias iid. Encuentre la distribución de probabilidad de la variable aleatoria:
$$\mathbf{X} \rightarrow \min(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$$

Problema 2

Considere una oficina de correos con 2 ventanillas de atención. Cuando usted llega, encuentra que hay 2 personas atendándose uno en cada ventanilla. La atención en la ventanilla 1 demora un tiempo exponencialmente distribuido de parámetro $\lambda[\frac{1}{u.t.}]$ mientras la atención en ventanilla 2 demora un tiempo exponencialmente distribuido de parámetro $\mu[\frac{1}{u.t.}]$ ($\lambda > \mu$)

1. ¿En cuál ventanilla se colocaría ?
2. ¿Cual es la probabilidad que usted sea último en irse de la oficina? (suponga que una vez que elige la fila no puede cambiarse)
3. ¿Suponga ahora que cuando usted llega descubre que hay 2 personas en la fila frente a la ventanilla 1 y solo persona en la ventanilla 2. Sin pensarlo, usted se pone en la fila más corta. ¿Cuál es la probabilidad que usted sea último en irse de la oficina? (suponga que una vez que elige la fila no puede cambiarse)

Problema 3

El dado A tiene 5 caras negras y una cara blanca, el dado B tiene 3 caras negras y 3 caras blancas. Se lanza una moneda al aire, si sale cara se elige el dado A, de lo contrario se elige el dado B. El dado elegido será lanzado muchas veces, registrando en cada caso si el resultado es blanco o negro.

- (a) Determine la probabilidad que la caída del n -ésimo lanzamiento del dado sea negra. (1 punto)
- (b) Determine la probabilidad que las caídas numero n y $(n+1)$ sean negras. (1 puntos)
- (c) Si no se sabe que dado se está lanzando, pero se observa que las primeras n caídas han sido negras. Calcule la probabilidad que la caída $(n+1)$ sea negra. Interprete su resultado cuando n es grande. (4 puntos)

Problema 4

Un agricultor siembra semillas de manzanos y naranjos, donde la probabilidad de que la semilla sea de un manzano es p y que sea un naranjo es $1-p$, plantando un total de S árboles. Por otro lado se sabe que los manzanos y naranjos dan un fruto según una distribución exponencial de tasa λ_m y λ_n respectivamente. Asuma que todos los árboles se plantan al mismo tiempo y la independencia en la elección de cada semilla para cada árbol.

1. Encuentre la probabilidad de que la primera fruta obtenida sea una manzana, en el caso de que se sepa que hay m manzanos y n naranjos plantados (1 punto).
2. Encuentre la misma probabilidad de antes en el caso en que no se sepa la cantidad de árboles de cada tipo que se han plantado (1 punto).
3. Calcule la probabilidad de que en las próximas h unidades de tiempo se tenga al menos una fruta nueva, dado que la última fruta obtenida fue hace u unidades de tiempo atrás (1 punto).

Suponga que desde ahora se tiene la misma plantación, donde se sabe que el número de naranjos es n y el de manzanos es m , sin embargo ha llegado una bacteria que afecta a los naranjos haciendo que cada naranja salga buena con una probabilidad b y afectando a los manzanos haciendo que estos puedan dar un sólo fruto cada uno.

4. Calcular el tiempo promedio que se debe esperar para obtener la próxima naranja comestible (1 punto).
5. Calcular el tiempo promedio que se debe esperar para obtener la próxima manzana, dado que hasta el momento se ha obtenido una cosecha de k manzanas ($m > k$) (1 punto).

Un agrónomo especialista en naranjos le ofrece sus servicios, de los cuales como resultado se obtiene que el tiempo de brote de cada naranja de distribuye ahora según una exponencial de tasa μ_n ($\mu_n \geq \lambda_n$), además todas las naranjas obtenidas son buenas. Suponga que el valor de una naranja es de \$100 la unidad.

6. Calcule el valor que estaría dispuesto a pagar el agricultor por el servicio del agrónomo (por unidades de tiempo) (1 punto).

Indicación: Trabaje con utilidades por unidad de tiempo.

Problema 5

Usted se encuentra dando una prueba de su ramo preferido el cual está siendo cuidado por dos ayudantes. El primer ayudante dice la verdad $3/4$ de las veces, mientras que el segundo de los ayudantes lo hace $4/5$ de las veces. Cada pregunta tiene 9 alternativas, y usted no sabe cuál es la respuesta correcta (pero los ayudantes sí la conocen). Por eso, usted ha decidido preguntarle a los 2 ayudantes su opinión respecto a la alternativa correcta.

Si ambos afirman que la alternativa correcta es la (d). ¿Cuál es la probabilidad que efectivamente esa sea la respuesta correcta a la pregunta (es decir, que ambos ayudantes estén diciendo la verdad)?

Hint: La probabilidad a priori que cualquiera de las alternativas sea la correcta es $1/9$.