

Auxiliar 3: PDD y PDE

Martes 4 de Abril de 2011

Problema 1

1. Existe un conjunto de decisiones interrelacionadas, si se modelan adecuadamente las etapas se tendrá que la decisión para una de ellas es independiente de decisiones pasadas y sólo dependerá de variables de estado, etc.
2. De acuerdo al procedimiento usual para definir un modelo de programación dinámica se tendrá:

- **Etapas:**

Cada uno de los barrios, $m : 1, \dots, M$.

- **Variables de estado:**

S_m , el número de botones restantes en la etapa m (sin asignar).

- **Variables de decisión:**

X_m , el número de botones asignados al barrio m .

- **Recurrencia de estados:**

$$S_{m+1} = S_m - X_m$$

- **Función de beneficios:**

$$V_m(S_m, X_m) = P(X_m) + V_{m+1}^*(S_m - X_m)$$

Donde:

$$V_m^*(S_m) = \max_{X_m \leq S_m} \{V_m(S_m, X_m)\}$$

- **Condiciones de borde:**

$$V_{M+1}^*(\%) = 0$$

$$S_1 = K$$

3. Al igual que en el punto anterior se tendrá que:

- **Etapas:**

Cada uno de los barrios, $m : 1, \dots, M$.

- **Variables de estado:**

S_m , el número de botones restantes en la etapa m (sin asignar).

- **Variables de decisión:**

X_m , el número de botones asignados al barrio m .

- **Recurrencia de estados:**

$$S_{m+1} = S_m - X_m$$

- **Función de beneficios:**

$$V_m(S_m, X_m) = P(X_m) - r_m \cdot \max\{0, X_m - U_m\} - t_m \cdot \max\{0, L_m - X_m\} + V_{m+1}^*(S_m - X_m)$$

Donde:

$$V_m^*(S_m) = \max_{X_m \leq S_m} \{V_m(S_m, X_m)\}$$

■ Condiciones de borde:

$$\begin{aligned} V_{M+1}^*(\%) &= 0 \\ S_1 &= K \end{aligned}$$

4. De acuerdo al punto anterior y a los datos provistos en el enunciado tendremos que:

Para **m=3**:

S_3	$x_3 = 0$	$x_3 = 1$	$x_3 = 2$	$x_3 = 3$	$x_3 = 4$	$x_3 = 5$	V_3^*	x_3^*
0	-40	-	-	-	-	-	-40	0
1	-40	30	-	-	-	-	30	1
2	-40	30	70	-	-	-	70	2
3	-40	30	70	80	-	-	80	3
4	-40	30	70	80	80	-	80	3,4
5	-40	30	70	80	80	90	90	5

Para **m=2**:

S_2	$x_2 = 0$	$x_2 = 1$	$x_2 = 2$	$x_2 = 3$	$x_2 = 4$	$x_2 = 5$	V_2^*	x_2^*
0	-70	-	-	-	-	-	-70	0
1	0	-35	-	-	-	-	0	0
2	40	35	5	-	-	-	40	0
3	50	75	75	35	-	-	75	1,2
4	50	85	115	105	55	-	115	2
5	60	85	135	145	125	80	145	3

Para **m=1**:

S_1	$x_1 = 0$	$x_1 = 1$	$x_1 = 2$	$x_1 = 3$	$x_1 = 4$	$x_1 = 5$	V_1^*	x_1^*
5	125	150	145	130	95	30	150	1

Entonces la estrategia es la siguiente:

- Barrio 1: 1 Botones
- Barrio 2: 2 Botones
- Barrio 3: 2 Botones

Esta estrategia consigue un total de 150 votos.

Problema 2

1. El problema es abordable mediante programación dinámica debido a la característica intertemporal de las decisiones, la existencia de etapas de decisión y en cada una de ellas se resuelve un problema de estructura similar .

2. MODELO DE PROGRAMACIÓN DINÁMICA

Etapas:

- $k = 1, \dots, K$ c/u de los meses.

Variable de estado:

- S_k Cantidad de aviones almacenados en inventario desde el periodo $k - 1$ al k .

Variable de decisión:

- X_k Número aviones a fabricar el mes k .

Recursión:

- $S_{k+1} = S_k + X_k - D_k$

Función objetivo:

- Dado que los ingresos ya están contabilizados (mediante el contrato) solamente buscaremos minimizar el valor de los costos de producción y bodegaje.

$$V_k^*(S_k) = \min_{X_k} \left[C_{X_k,k} + h \cdot S_k + V_{k+1}^*(S_{k+1}) \right]$$

$$\text{s.a.} \quad X_k \geq \max\{0, D_k - S_k\}$$

$$X_k \leq M\chi_{\{D_k > S_k\}}$$

Notar que el costo de bodegaje desde el período $k - 1$ al k es contabilizado en el período k . Además la primera restricción sobre la variable de decisión impide que algún mes no se cumpla el contrato de entrega de los aviones. La segunda restricción impide que se produzcan aviones si quedan en bodega, salvo para satisfacer la demanda del período en cuestión (χ es la función indicatriz y M es un número grande).

Condiciones de Borde:

- $S_1 = 0$ Al comienzo no hay inventario.
- $S_{K+1} = 0$ o $D_K = X_K + S_K$ Al final no deben sobrar aviones.
- $V_{K+1} = 0$ Valor residual.

3. CASO PARTICULAR

Primero debemos notar que la restricción de no producir si quedan aviones guardados y la condición de borde que nos dice que $S_5 = 0$ reduce notablemente el cuadro de solución en todos los períodos.

Período 4

S_4	0	1	$V_4^*(\$)$	X_4^*
0	i	3	3	1
1	0.1	i	0.1	0

Período 3

S_3	0	1	2	$V_3^*(\$)$	X_3^*
0	i	$6 + 3$	$7 + 0.1$	7.1	2
1	$0.1 + 3$	i	i	3.1	0
2	$0.2 + 0.1$	i	i	0.3	0

Período 2

S_2	0	1	2	3	$V_2^*(\$)$	X_2^*
0	i	$6 + 7.1$	$9 + 3.1$	$12 + 0.3$	12.1	2
1	$0.1 + 7.1$	i	i	i	7.2	0
2	$0.2 + 3.1$	i	i	i	3.3	0
3	$0.3 + 0.3$	i	i	i	0.6	0

Período 1

S_1	0	1	2	3	4	$V_1^*(\$)$	X_1^*
0	i	5 + 12.1	10 + 7.2	15 + 3.3	17 + 0.6	17.1	1

Entonces, la política de producción óptima es: Producir una unidad el mes 1, producir 2 unidades el mes 2, no producir el mes 3 y producir una unidad el mes 4.

- Ahora debemos agregar una nueva variable que nos indique cuantas aviones se han fabricado hasta un mes en particular.

MODELO DE PROGRAMACIÓN DINÁMICA MODIFICADO

Estados:

- $k = 1, \dots, K$ c/u de los meses.

Variable de estado:

- S_k Cantidad de aviones almacenados en inventario desde el periodo $k - 1$ al k .
- A_k Cantidad de aviones fabricados hasta el comienzo del mes k .

Variable de decisión:

- X_k Número aviones a fabricar el mes k .

Recursión:

- $S_{k+1} = S_k + X_k - D_k$
- $A_{k+1} = A_k + X_k$

Función objetivo:

- Dado que los ingresos ya están contabilizados (mediante el contrato) solamente buscaremos minimizar el valor de los costos de producción y bodegaje.

$$\begin{aligned}
 V_k^*(S_k, A_k) &= \min_{X_k} \left[C_{X_k, k} + \sum_{j=1}^{X_k} R(A_k + j, k) + h \cdot S_k + V_{k+1}^*(S_{k+1}, A_{k+1}) \right] \\
 \text{s.a.} \quad &X_k \geq \max\{0, D_k - S_k\} \\
 &X_k \leq M \chi_{\{D_k > S_k\}}
 \end{aligned}$$

Condiciones de Borde:

- $S_1 = 0$ Al comienzo no hay inventario.
- $A_1 = 0$ Al comienzo no se han fabricado aviones.
- $S_{K+1} = 0$ o $D_K = X_K + S_K$ o $A_{K+1} = \sum_{k=1}^K D_k$ Al final no deben sobrar aviones.
- $V_{K+1} = 0$ Valor residual.

Problema 3

- MODELO DETERMINÍSTICO

Variable de estado:

S_t = años de uso de la máquina disponible al inicio del período t.

Variable de decisión:

$$X_t = \begin{cases} - & \text{No reemplazo} \\ 0 & \text{Reemplazo por máquina de 0 años,} \\ 1 & \text{Reemplazo por máquina de 1 año,} \\ \vdots & \\ n & \text{Reemplazo por máquina de n años,} \end{cases}$$

Función de beneficio:

$$f_t(S_t, X_t) = \begin{cases} C_{S_t} + f_{t+1}^*(S_t + 1) & \text{En caso de no reemplazar, } X_t = - \\ C_{X_t} + I_{X_t} - V_{S_t} + f_{t+1}^*(X_t + 1) & \text{En caso de reemplazar, } X_t = 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$f_t^*(S_t) = \min_{X_t} f_t(S_t, X_t)$$

Donde $f_t^*(S_t)$ = costo mínimo de la operación de la máquina desde el inicio del período t hasta el final, es decir, hasta T si la antigüedad del equipo es S_t .

Condiciones de borde y función objetivo

$$\begin{aligned} f_{T+1}(S_{T+1}) &= -V_{S_{T+1}} \\ f_1^* &= \min_{X_1=0,1,2,\dots} \left\{ I_{X_1} + C_{X_1} + f_2^*(X_1 + 1) \right\} \end{aligned}$$

2. MODELO ESTOCÁSTICO**Variable de estado**

S_t = años de uso de la máquina disponible al inicio del período t .

Variable de decisión:

$$X_t = \begin{cases} - & \text{No reemplazo} \\ 0 & \text{Reemplazo por máquina de 0 años,} \\ 1 & \text{Reemplazo por máquina de 1 año,} \\ \vdots & \\ n & \text{Reemplazo por máquina de n años,} \end{cases}$$

Variable aleatoria

$$w_t(S_t) = \begin{cases} 1 & \text{máquina buena al final del período } t, \text{ si es de antigüedad } S_t \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Donde la probabilidad $P[w_t(S_t) = 1] = (1 - q_{S_t+1})$

Función de beneficio:

$$E \left[f_t(S_t, X_t) \right] = \begin{cases} C_{S_t} + (1 - q_{S_t+1}) \cdot f_{t+1}^*(S_t + 1) + q_{S_t+1} \cdot \left(1, 5I_0 + f_{t+1}^*(0) \right) \\ \text{En caso de no reemplazar, } X_t = - \\ C_{X_t} + I_{X_t} - V_{S_t} + (1 - q_{X_t+1}) \cdot f_{t+1}^*(X_t + 1) + q_{X_t+1} \cdot \left(1, 5I_0 + f_{t+1}^*(0) \right) \\ \text{En caso de reemplazar, } X_t = 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$f_t^*(S_t) = \min_{X_t} E \left[f_t(S_t, X_t) \right]$$

Donde $f_t^*(S_t)$ = costo mínimo esperado de la operación de la máquina desde el inicio del período t hasta el final, es decir, hasta T si la antigüedad del equipo es S_t .

Condiciones de borde y función objetivo

Hay que notar que el valor residual ya no es tan claro, porque si la máquina se hecha a perder justo al final del último período NO necesitamos reemplazarla, así se tendrá:

$$E \left[f_T(S_T, X_T) \right] = \begin{cases} C_{S_T} + (1 - q_{S_T+1}) \cdot -V_{S_T+1} \\ \text{En caso de no reemplazar, } X_t = - \\ C_{X_T} + I_{X_T} - V_{S_T} + (1 - q_{X_T+1}) \cdot -V_{X_T+1} \\ \text{En caso de reemplazar, } X_t = 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$f_1 = \min_{X_1=0, 1, 2, \dots} \left\{ I_{X_1} + C_{X_1} + \mathbb{E}_{w_1} \left[f_2^*(X_1 + 1) \right] \right\}$$