

## Auxiliar 3: PDD y PDE

Martes 4 de Abril de 2011

### Problema 1

En una popular comuna el alcalde está bastante preocupado por la seguridad ciudadana, por lo que ha decidido implementar un curioso sistema de botones de pánico, a través de los cuales la amedrentada población podrá pedir ayuda en caso de emergencia.

Después de grandes esfuerzos por conseguir presupuesto, el alcalde cuenta con un capital que le permite instalar un máximo de  $K$  botones, los cuales debe distribuir en los  $M$  barrios de su comuna. (con  $K > M$ ).

Según el experimentado equipo de asesores del edil, que ya piensan en la reelección, si en el barrio  $m$  se instalan  $k$  botones, el alcalde ganará  $P_m(k)$  votos adicionales.

Suponga que es contratado para determinar la asignación que maximiza la cantidad de votos que conseguirá el alcalde en la próxima elección, producto de su campaña de seguridad ciudadana.

1. ¿Por qué este problema es susceptible a ser abordado por un enfoque de programación dinámica?
2. Modele el problema usando programación dinámica determinística, explicitando claramente las etapas, variables de decisión, variables de estado y funciones de beneficio.

Suponga ahora que si en un barrio  $m$ , se instalan más de  $U_m$  botones, la oposición al alcalde lo acusará públicamente de populista y derrochador. Esto implica una pérdida de  $r_m$  votos por cada botón por sobre  $U_m$ , instalado en esta zona.

Por otra parte, si en el barrio  $m$  se asignan menos de  $L_m$  aparatos de emergencia, la junta de vecinos del sector también iniciará una campaña de desprestigio que implica la pérdida de  $t_m$  sufragios por cada botón por debajo de  $L_m$ .

1. Modele el nuevo escenario, usando programación dinámica determinística.
2. Suponga que  $M = 3$  y  $K = 5$ . Además se sabe que  $L_1 = L_2 = L_3 = 2$  y  $U_1 = U_2 = U_3 = 3$  y se cuenta con estimaciones de los votos que obtendrá el alcalde en cada barrio, en función del número de botones que instale, la que se resume en la siguiente tabla. Con esta información y usando el modelo planteado en la parte (c), encuentre la asignación óptima de botones.

N° Botones de pánico	Barrio 1	Barrio 2	Barrio 3
0	0	0	0
1	45	20	50
2	70	45	70
3	90	75	80
4	105	110	100
5	120	150	130
r	10	15	20
t	10	15	20

### Problema 2

La empresa fabricante de aviones POING, lo ha contratado a ud. como gerente de producción. La compañía, actualmente tiene compromisos de entregar  $d_k$  aviones el mes  $k$  ( $K \in \{1, \dots, K\}$ ).

La planta tiene capacidad para fabricar en un mes, el número de aviones que convenga. Además, puede guardar aeronaves para satisfacer los compromisos de meses siguientes. Guardar un avión durante un mes, tiene un costo de  $h$  u.m. Por otro lado, no se incurre en ningún gasto de inventario si un producto terminado es fabricado y entregado en el mismo mes. Suponga que el avión se entrega siempre al final de cada mes.

Al comienzo de este período de  $K$  meses la planta no tiene aviones en inventario y al final tampoco debe tenerlos. Como regla de operación la compañía no fabrica aviones si en bodega tiene unidades suficientes para satisfacer la demanda del período en curso.

El costo total de fabricar  $i$  aviones en el mes  $k$  es  $C_{ik}$ . El problema al que se ve enfrentado ud., como gerente de la compañía es determinar cuánto se debe fabricar en cada mes, de manera de minimizar los costos de fabricación y de inventario, cumpliendo con los compromisos de entrega.

1. ¿Porqué este problema es susceptible a ser abordado por un enfoque de programación dinámica?
2. Modele el problema usando programación dinámica determinística, explicitando claramente las etapas, variables decisión, variables de estado y funciones de beneficio.

Suponga ahora que  $K = 4$ ,  $h = 0,1$ ,  $D_k = 1 \forall k$  y que los costos  $C_{ik}$ , están dados por la siguiente tabla:

	<i>Cantidad a fabricar</i>			
<i>Mes</i>	1	2	3	4
1	5	10	15	17
2	6	9	12	—
3	6	7	—	—
4	3	—	—	—

3. Con esta información se pide encontrar la política óptima de producción, usando el modelo planteado en la parte 2. Explícite claramente las funciones de beneficio y las decisiones óptimas en cada una de las etapas de la programación.
4. Suponga ahora que el dueño de la compañía desea incentivar a sus trabajadores. Para esto entregará un premio (que se distribuirá entre todos los trabajadores) cada vez que un nuevo avión es terminado. Este premio dependerá del número total de aviones producidos hasta el momento y del mes en el cual se fabrica. Este premio tiene un valor de  $R(n, k)$  si el  $n$ -ésimo avión es fabricado en el mes  $k$ . Reformule el modelo de la parte 2 para esta nueva situación.

### Problema 3

El gerente de operaciones de una fábrica desea programar la operación de un proceso para los siguientes  $T$  períodos. Para realizar este proceso se necesita una máquina cuyo costo de operación depende de su antigüedad y es igual a  $C_n$  por año, con  $n$  representando la edad de la máquina ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ).

Cada año se tiene la opción de reemplazar este equipo por otro, nuevo o usado, el costo de adquisición de un equipo con  $n$  años de uso es de  $I_n$ . Por otra parte el gerente puede vender un equipo con  $n$  años de uso a un precio de venta  $V_n$ .

Actualmente la gerencia NO dispone de la máquina, por lo que necesariamente tendrá que comprarla, además todos los años debe tener el proceso funcionando.

1. Plantee el problema de operación y reemplazo de equipo como un problema de programación dinámica determinística, con el fin de minimizar el costo total.

Considere ahora que el equipo tiene una probabilidad de fallar al final de un cada uno de los períodos. Esta probabilidad depende exclusivamente de la edad de la máquina y es igual a  $q_n$ . En este caso necesariamente deberemos reemplazar el equipo por uno nuevo, pagando un sobreprecio de un 50%, al inicio del período siguiente. Un equipo que falla pierde su valor económico (nadie lo compra).

2. Plantee este problema de operación y reemplazo de equipo como un problema de programación dinámica estocástica, con el fin de minimizar el costo total esperado.