IN3702: Investigación de Operaciones
Profs: J.Correa, R.Epstein
Aux: C.Kuhlman, N. Inostroza, I.Ríos, L.F.Solari

CTP 1

Martes 29 de Marzo de 2011

Pregunta

Suponga que usted dirige el área de I&D de una importante empresa multinacional. El área consta con dos equipos de trabajo: A y B, cada uno dedicado a una línea de investigación diferente. Éstos equipos de trabajo cuentan con un total de investigadores N_A y N_B respectivamente. Supondremos que el tiempo que demora un investigador en generar un nuevo producto sigue una distribución exponencial de parámetro λ_i con $i = A, B$ dependiendo del equipo en el que trabaja.

Se sabe que al comienzo de cada año, cada uno de los investigadores renuncia a su trabajo con probabilidad $(1-p)$ con $p \in (0,1)$ (buscando nuevos horizontes). De no renunciar, se sabe que trabajará para la empresa el resto del año.

(1) Calcule el tiempo esperado en el que un investigador deja su trabajo.

Solución:

Definamos τ_j el año en que el trabajador j abandona su trabajo:

$$E\{\tau_j\} = \sum_{i=1}^{\infty} ip^{i-1}(1-p) = (1-p)\sum_{i=1}^{\infty} ip^{i-1} \tag{1}$$

$$E\{\tau_j\} = (1-p)\sum_{i=0}^{\infty} \frac{d(p^i)}{dp} \tag{2}$$

$$E\{\tau_j\} = (1-p)\frac{d}{dp}\sum_{i=0}^{\infty}(p^i) \tag{3}$$

$$E\{\tau_j\} = (1-p)\frac{d}{dp}\frac{1}{(1-p)} \tag{4}$$

$$E\{\tau_j\} = (1-p)\frac{1}{(1-p)^2} \tag{5}$$

$$E\{\tau_j\} = \frac{1}{(1-p)} \tag{6}$$

(2) Calcule la probabilidad que el primer producto sea desarrollado por el equipo A, suponiendo conocidos el número de trabajadores (n_A, n_B).

Solución:

Definamos $\{t_i^A\}_{i=1}^{n_A}$, $\{t_i^B\}_{i=1}^{n_B}$, los tiempos asociados a la producción de los distintos trabajadores.

Sean $T_A = Min\{t_1^A, ..., t_{n_A}^A\}$ y $T_B = Min\{t_1^B, ..., t_{n_B}^B\}$ los tiempos en que se producen los primeros productos en los equipos A y B respectivamente.

Sabemos que

$$T_A = Min\{t_1^A, ..., t_{n_A}^A\} \vdash exp(n_A\lambda_A)$$
$$T_B = Min\{t_1^B, ..., t_{n_B}^B\} \vdash exp(n_B\lambda_B)$$

Luego,

$$\mathtt{P}\{T_A \leq T_B\} = \frac{n_A\lambda_A}{n_A\lambda_A + n_B\lambda_B}$$

Pues se trata de una Carrera Exponencial.

(3) Calcule la probabilidad que el primer producto sea desarrollado por el equipo A, dado que se sabe que el primer producto se realiza durante el primer año.

Solución:

Supongamos por un instante conocidos n_A y n_B, queremos calcular $\mathbf{P}\{T_A < T_B | Min\{T_A, T_B\} \leq 1\}$, que no corresponde, a priori, a una Carrera Exponencial como tal pues se ha condicionado que el primer producto ocurre durante el primer año.

Notemos que,

$\mathbf{P}\{T_A < T_B\} = \mathbf{P}\{T_A < T_B | Min\{T_A, T_B\} \leq 1\}\mathbf{P}\{Min\{T_A, T_B\} \leq 1\} + \mathbf{P}\{T_A < T_B | Min\{T_A, T_B\} > 1\}\mathbf{P}\{Min\{T_A, T_B\} > 1\}$

Pero,

$$\mathbf{P}\{T_A < T_B | Min\{T_A, T_B\} > 1\} = \mathbf{P}\{T_A < T_B\}$$

Por la Pérdida de Memoria de la Exponencial

y además,

$$\mathbf{P}\{Min\{T_A, T_B\} > 1\} = 1 - \mathbf{P}\{Min\{T_A, T_B\} \leq 1\}$$

Luego, despejando, encontramos que:

$$\mathbf{P}\{T_A < T_B | Min\{T_A, T_B\} \leq 1\} = \mathbf{P}\{T_A < T_B\}$$

Ahora, volvemos al caso en que no conocemos n_A y n_B:

$$\mathbf{P}\{T_A < T_B | Min\{T_A, T_B\} \leq 1\} = \sum_{k_A, k_B} \mathbf{P}\{T_A < T_B \mid n_A = k_A, n_B = k_B\}\mathbf{P}\{n_A = k_A, n_B = k_B\}$$

$$= \sum_{k_A=0}^{N_A} \sum_{k_B=0}^{N_B} \frac{k_A \lambda_A}{k_A \lambda_A + k_B \lambda_B} \mathbf{P}\{n_A = k_A, n_B = k_B\}$$

$$= \sum_{k_A=0}^{N_A} \sum_{k_B=0}^{N_B} \frac{k_A \lambda_A}{k_A \lambda_A + k_B \lambda_B} \frac{N_A!}{(N_A - k_A)! k_A!} p^{k_A} (1-p)^{N_A - k_A} \frac{N_B!}{(N_B - k_B)! k_B!} p^{k_B} (1-p)^{N_B - k_B}$$

Suponga ahora que de los productos generados por el equipo B, sólo una fracción $q \in (0, 1)$ termina siendo un éxito de ventas.

(4) Calcule el tiempo promedio que se debe esperar para obtener el primer producto existoso del equipo B, suponiendo que hay n_B trabajadores.

Solución:

Definamos

t_i^b: El tiempo entre que sale el proucto $i-$ésimo y el $(i-1)-$ésimo del equipo b

Sea además,

T_i^b: El tiempo que tarda en salir el producto i del equipo B

$T_i^b = \sum_{j=1}^{i} t_j^b$

Luego se tendrá que:

$\mathbf{E}$(Tiempo en que sale el primer producto exitoso de b)

$= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{E}\{T_i^b$ |Han salido $(i-1)$prods no existosos y i es exitoso $\}\mathbf{P}\{$Han salido $(i-1)$ prods no existosos y i es existoso $\}$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{E}\{T_i^b\}(1-q)^{i-1} q$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{\infty}(\sum_{j=1}^{i}\mathbf{E}\{t_j^b\})(1-q)^{i-1}q \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}(\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{n_B\lambda_B})(1-q)^{i-1}q \\
&= \frac{q}{n_B\lambda_B}\sum_{i=1}^{\infty} i(1-q)^{i-1} \\
&= \frac{q}{n_B\lambda_B}\frac{1}{q^2} \\
&= \frac{1}{qn_B\lambda_B}
\end{aligned}
$$