

Auxiliar 4: PDE

Lunes 11 de Abril de 2011

Problema 1

(a) La estrategia sería la siguiente: En la primera hora hornear los pernos 1 y 2, en la segunda hora los pernos 1 y 3, y en la tercera hora los pernos 2 y 3. Luego, con sólo 3 horas, ha sido suficiente para hornear los 3 pernos con capacidad para 2 pernos.

(b) Note que se requiere de $d \cdot n$ horas en total para hornear a todos los pernos si el horno tuviese capacidad 1. Sin embargo, dado que el horno tiene una capacidad de k , entonces se pueden hornear los pernos en $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ grupos, cada uno con a lo más k pernos (todos con exactamente k excepto posiblemente el último grupo). Cada grupo pasará d horas en el horno por lo que en total tenemos la cota superior de $d \cdot \lceil \frac{n}{k} \rceil$.

(c) Modelo del problema:

■ **Etapas:**

Horas utilizadas, $t : 1, \dots, d \cdot \lceil \frac{n}{k} \rceil$.

■ **Variables de estado:**

$$\begin{pmatrix} n_0^t \\ n_1^t \\ \vdots \\ n_d^t \end{pmatrix},$$

con n_j^t = número de pernos que han sido horneados por j horas hasta la hora t .

■ **Variables de decisión:**

$$\begin{pmatrix} a_0^t \\ a_1^t \\ \vdots \\ a_{d-1}^t \end{pmatrix},$$

con a_l^t = número de pernos que horneo para pasar de tener l horas horneadas a $l+1$ al principio de la hora t .

■ **Recurrencia de estados:**

$$\begin{aligned} n_0^{t+1} &= n_0^t - a_0^t \\ n_j^{t+1} &= n_j^t - a_j^t + a_{j-1}^t \forall j \in \{1, \dots, d-1\} \\ n_d^{t+1} &= n_d^t + a_{d-1}^t \end{aligned}$$

■ **Función de costo:**

$$V^t(n_0^t, n_1^t, \dots, n_d^t) = 1 + \min_{0 \leq a_j^t \leq n_j^t \text{ for } 0 \leq j \leq d-1, \sum_{j=0}^{d-1} a_j^t \leq k} V^{t+1}(n_0^t - a_0^t, n_1^t - a_1^t + a_0^t, \dots, n_d^t + a_{d-1}^t)$$

■ **Condiciones de borde:**

$$V^t(0, 0, \dots, 0, n) = 0, \forall t, 0 \leq t$$

$$n_0^0 = n$$

$$n_j^0 = 0, \forall j \in \{1, \dots, d\}$$

Problema 2

■ **Etapas:**

Cada uno de los períodos del horizonte de evaluación, $t=1, \dots, T$

■ **Variables de Estado:**

S_t = Stock en tienda en período t .

B_t = Stock en bodega central en periodo t .

L_t = Cantidad de piscinas enviadas a la tienda, en el período anterior.

■ **Variable de Decisión:**

e_t = Cantidad de piscinas a enviar de bodega central a tienda en periodo t .

■ **Variable Aleatoria:**

D_t = Demanda de piscinas en la tienda en periodo t .

Dado que en cada uno de los períodos del horizonte la tienda tiene R clientes potenciales, cada uno de los cuales demanda 1 unidad del producto con probabilidad q_t , en el período t , se tiene que:

$$P[D_t = k] = \binom{R_t}{k} q_t^k (1 - q_t)^{R_t - k}$$

■ **Recurrencias:**

$$S_{t+1} = \max\{S_t + e_t - D_t, 0\}$$

$$B_{t+1} = B_t - e_t$$

$$L_{t+1} = e_t$$

■ **Función de Beneficio:**

$$E_{D_t}[V_t(B_t, S_t, L_t, e_t)] = -c_t(e_t) - A_t \cdot |e_t - L_t| + \sum_{k=0}^{\infty} P[D_t = k] \cdot [U_{t,k} + V_{t+1}^*(B_t - e_t, \max\{S_t + e_t - k, 0\}, e_t)]$$

Donde:

$$U_{t,k} = P \cdot \min\{S_t + e_t, k\}$$

$$V_t^*(B_t, S_t, L_t) = \max_{e_t \leq B_t, S_t + e_t \leq K} \{E_{D_t}[V_t(B_t, S_t, L_t, e_t)]\}$$

■ **Condiciones de Borde:**

$$V_{T+1}(B_{T+1}, S_{T+1}, L_{T+1}) = S \cdot S_{T+1}$$

$$B_1 = C$$

$$L_1 = e_0$$

$$S_1 = H$$