Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Auxiliar Repaso: Límites

Auxiliar: Waldo Gálvez V.
05 de Agosto de 2011

Repaso e Indicaciones:

- Si aún hay dudas sobre definición de límites, pueden aclararse un poco viendo el archivo que está en esta sección en material docente, llamado $limite\_funciones$.

- Límites conocidos de sucesiones.

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 < q < 1 \\ 1 & \text{si } q = 1 \\ \nexists & \text{si } q \leqslant -1 \vee q > 1 \end{cases} \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = \begin{cases} 0 & \text{si } a = 0 \\ 1 & \text{si } a > 0 \\ \nexists & \text{si } q < 0 \end{cases} \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^k} = 1, \text{k cte.}$$

- Límite exponencial: $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, y en general, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$

- Álgebra de límites: De existir los límites, y si el límite del denominador en el cuociente es distinto de cero, se cumple que:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n \pm b_n = \lim_{n\to+\infty} a_n \pm \lim_{n\to+\infty} b_n \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n\to+\infty} a_n \cdot \lim_{n\to+\infty} b_n \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to+\infty} b_n}$$

- **Precaución** Las siguientes operaciones de límites pueden llevar a cualquier resultado, no tienen por qué ser $0, \infty$ ó algún otro número. Dependen de cada caso: $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, $\frac{\infty}{\infty}$ y $\frac{0}{0}$.

- Teorema del Sandwich: Si una sucesión a_n está acotada tanto superior como inferiormente por sucesiones b_n y c_n respectivamente ($b_n \leqslant a_n \leqslant c_n$), y además ambas sucesiones convergen al mismo límite l, entonces a_n converge a dicho límite l.

- Límites conocidos de funciones:

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin(x)}{x} = 1, \quad \lim_{x\to0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1, \quad \lim_{x\to0} \frac{ln(1+x)}{x} = 1, \text{ o bien, } \lim_{x\to1} \frac{ln(x)}{x-1} = 1$$

- Cambio de Variable: Herramienta muy útil para el cálculo de límites de funciones, que no es estrictamente necesaria, pero facilita las cosas. Dentro de la función que se calcula, puede definirse una nueva variable en función de la original (generalmente en función de x), que permita ver mucho más fácilmente cuál es el límite conocido a aplicar. Hay que tener ojo con cómo reemplazar la nueva variable, qué constantes aparecen, y a qué tiende esta nueva variable. Luego se verá en acción.

Ejercicios

P1) Calcule el siguiente límite $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n-6}{2n+4}$, y usando la definición de límite de sucesiones, demuestre que efectivamente es ése.

Desarrollo La definición de límite, cuando $a_n \to l$, es $\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{R}, \forall n \geqslant n_0, |a_n - l| \leqslant \varepsilon$. Entonces, para completar la demostración, primero hay que determinar dicho límite, y luego demostrar que, dado ε cualquiera, podemos encontrar un n_0 conveniente que verifica la definición.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n-6}{2n+4} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(1-6/n)}{n(2+4/n)} = \frac{1}{2}$$

Así entonces, bastará encontrar un n_0 para que, dado ε, se cumpla que $\left|\dfrac{n-6}{2n+4} - \dfrac{1}{2}\right| \leqslant \varepsilon$. En cierta forma, buscamos que dicho módulo tienda a cero.

$$\left|\frac{n-6}{2n+4} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2n-12-2n-4}{4n+8}\right| = \left|\frac{-16}{4n+8}\right| = \frac{4}{n+2}$$

pero $\dfrac{4}{n+2} \leqslant \dfrac{4}{n}$ y queremos finalmente que $\dfrac{4}{n} \leqslant \varepsilon$, para concluir por transitividad.

Puede verse de lo último, si definimos $n_0 = \dfrac{4}{\varepsilon}$, se terminará cumpliendo casi obviamente la definición de límite, ya que a fin de cuentas, definiendo ese n_0 y por transitividad, lo que estamos diciendo es que $\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{R}, \forall n \geqslant n_0$, se cumple que $n \geqslant n_0$, lo cual es verdadero gratis, todo gracias a cómo se definió n_0. Así queda demostrado.

P2) Calcule, de existir, los siguientes límites

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin(n)}{n}$

Dadas las cotas de la función seno, se tiene que $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$, y al dividir por n (que es positivo), se llega a que:

$$\frac{-1}{n} \leqslant \frac{\sin(n)}{n} \leqslant \frac{1}{n}$$

donde ambas cotas convergen al mismo valor, que es 0. Por teorema del Sandwich, podemos concluir entonces que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin(n)}{n} = 0$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n}$

Como no se ve una posibilidad clara de usar álgebra de límites, hay que buscar desigualdades. Para n fijo, $\sqrt[n]{x}$ es creciente, por lo tanto la raíz completa va a ser mayor que si consideramos un sólo término, y menor que si consideramos dos veces el más grande. Inteligentemente acotando, podemos ver que:

$$\sqrt[n]{3^n} \leqslant \sqrt[n]{2^n + 3^n} \leqslant \sqrt[n]{3^n + 3^n}$$
$$3 \leqslant \sqrt[n]{2^n + 3^n} \leqslant 3\sqrt[n]{3}$$

Ambas cotas convergen al mismo límite, que es 3. Por teorema del Sandwich, la sucesión original converge entonces a 3. Es decir $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n} = 3$.

P3) Utilizando los límites conocidos de funciones, calcule de existir los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{\sin(x)} - e^x}{x}$

Puede verse claro que, al haber involucradas sólo exponenciales y senos, los límites conocidos a hacer aparecer son precisamente los de la exponencial y del seno. Es decir, hay que multiplicar por 1's convenientes, sumar 0's convenientes a fin de armar los límites conocidos.

$$\frac{e^{\sin(x)} - e^x}{x} = \frac{e^{\sin(x)} - 1}{x} - \frac{e^x - 1}{x} = \frac{e^{\sin(x)} - 1}{\sin(x)} \cdot \frac{\sin(x)}{x} - \frac{e^x - 1}{x}$$

Por álgebra de límites:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin(x)} - e^x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin(x)} - 1}{\sin(x)} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} - \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

Haciendo un cambio de variable en el primer límite, $u = \sin(x), u \to 0$ cuando $x \to 0$, se obtiene que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin(x)} - e^x}{x} = \lim_{u \to 0} \frac{e^u - 1}{u} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} - \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \cdot 1 - 1 = 0$$

b) $\lim x \to 0 \dfrac{ln(\cos(x))}{x^2}$

Nuevamente puede verse que los límites involucrados serán solamente el de la exponencial y el de coseno.

$$\frac{ln(\cos(x)}{x^2} = \frac{ln(\cos(x))}{\cos(x) - 1} \cdot \frac{\cos(x) - 1}{x^2}$$

Por álgebra de límites,

$$\lim_{x \to 0} \frac{ln(\cos(x))}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{ln(\cos(x))}{\cos(x) - 1} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2}$$

Haciendo el cambio de variable $u = \cos(x), u \to 1$ cuando $x \to 0$ en el primer límite, se obtiene que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{ln(\cos(x))}{x} = \lim_{u \to 1} \frac{ln(u)}{u - 1} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} = 1 \cdot -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2^x - 3^x}{ln(1 + x)}$

Primero que todo, notar que 2^x y 3^x no son lo que aparentan... al fin de cuentas, son exponenciales escondidas. Por lo tanto, los límites que hay que hacer aparecer son el de la exponencial y el del logaritmo.

$$\frac{2^x - 3^x}{ln(1+x)} = \frac{e^{xln(2)} - e^{xln(3)}}{ln(1+x)} = \frac{e^{xln(2)} - 1}{ln(1+x)} - \frac{e^{xln(3)} - 1}{ln(1+x)} =$$
$$\frac{e^{xln(2)} - 1}{xln(2)} \cdot \frac{x}{ln(1+x)} \cdot ln(2) - \frac{e^{xln(3)} - 1}{xln(3)} \cdot \frac{x}{ln(1+x)} \cdot ln(3)$$

Por álgebra de límites, se tiene que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{2^x - 3^x}{ln(1+x)} = ln(2) \cdot \lim_{x \to 0} \frac{e^{xln(2)} - 1}{xln(2)} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{x}{ln(1+x)} - ln(3) \cdot \lim_{x \to 0} \frac{e^{xln(3)} - 1}{xln(3)} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{x}{ln(1+x)}$$

Haciendo los cambios de variable $u = xln(2), v = xln(3)$, $u \to 0, v \to 0$ cuando $x \to 0$, en los límites primero y tercero respectivamente, se obtiene:

$$\lim_{x \to 0} \frac{2^x - 3^x}{ln(1+x)} = ln(2) \cdot \lim_{u \to 0} \frac{e^u - 1}{u} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{x}{ln(1+x)} - ln(3) \cdot \lim_{v \to 0} \frac{e^v - 1}{v} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{x}{ln(1+x)} =$$
$$ln(2) \cdot 1 \cdot 1 - ln(3) \cdot 1 \cdot 1 = ln(2) - ln(3) = ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

Propuesto Determine, de existir, el valor de $\lim\limits_{x \to 0} \left[\frac{2}{1+x^2}\right]$. Indicación: Analice límites laterales.