Auxiliar 5 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Miércoles 13 de Abril, 2011

Profesor Cátedra: Jaime H. Ortega
Profesores Auxiliares: Benjamín Obando Vallejos - Matías Godoy Campbell

Pregunta 1. De acuerdo a la teoría de Yukawa para las fuerzas nucleares, la fuerza de atracción entre un protón y un neutrón tiene como potencial a $U(r) = K\frac{e^{-\alpha r}}{r}$ en coordenadas esféricas, para ciertas constantes $K < 0$ y $\alpha > 0$:

a) Encuentre la fuerza $\vec{F} = -\nabla U$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

b) Calcule directamente el flujo de $\vec{F}$ a través del casquete esférico de radio a ($a > 0$) orientado según la normal exterior.

c) Pruebe que $\Delta U = \alpha^2 U$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

d) Demuestre que si $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es un abierto acotado que contiene al origen, cuya frontera $\partial\Omega$ es una superficie regular a trozos y orientada según la normal exterior, entonces:

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{S} = 4\pi K - \alpha^2 \iiint_{\Omega} U dV$$

¿Contradice este resultado el teorema de la divergencia de Gauss? Explique.

Pregunta 2. Sean S una superficie suave y $\vec{P}$ un punto, tales que toda recta que pasa por $\vec{P}$ corta a S en a lo más un punto. Sea Ω la unión de todas las semi-rectas que parten de $\vec{P}$ y pasan por S, y sea ε_a la intersección de Ω con la superficie esférica de centro $\vec{P}$ y radio a. Demuestre que:

$$s = \frac{\text{Area de } \varepsilon_a}{a^2} = \iint_S \frac{(\vec{x} - \vec{P}) \cdot \hat{n}}{||\vec{x} - \vec{P}||^3} dS$$

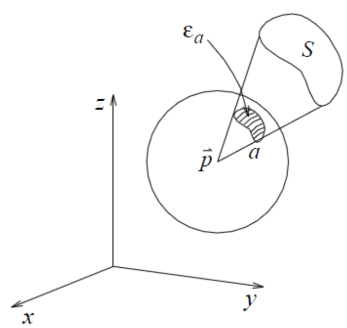

Figura 1: s se denomina ángulo sólido de S con respecto a $\vec{P}$

Pregunta 3.

a) Sea Γ una curva simple, suave por tramos, cerrada, en $\mathbb{R}^2$ y sea Ω la región interior a Γ. Demuestre que el área de Ω es igual a:

$$A(\Omega) = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} xdy - ydx$$

b) A partir de lo anterior, calcule las áreas obtenidas al segmentar la elipse de ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

cuando esta es dividida por la recta de ecuación $x = k$ (donde $|k| < a$).

Pregunta 4. Considere el campo vectorial: $\vec{F}(x,y) = \dfrac{(x-1)^2+y^2+y}{(x-1)^2+y^2}\hat{\imath} + \dfrac{2(x-1)^2+2y^2-(x-1)}{(x-1)^2+y^2}\hat{\jmath}$

a) Calcule $\oint_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{r}$, donde $\mathcal{C}$ es la circunferencia centrada en $(1,0)$ de radio $r>0$

b) Calcule $\oint_{\Gamma} \vec{F}\cdot d\vec{r}$, donde Γ es una curva regular por tramos, tal que el punto $(1,0)$ es interior a la región D encerrada por Γ

Pregunta 5. Sea Γ la curva que se obtiene de intersectar la superficie $z = x^2+y^2$ con la superficie de la esfera unitaria. Considere Γ recorrida en sentido antihorario.
Considere $\vec{F} = \frac{1}{\rho}\hat{\theta} + z\hat{k}$. Pruebe que $rot\vec{F} = 0$ para $\rho > 0$, pero que sin embargo $\oint_{\Gamma} \vec{F}\cdot d\vec{r} \neq 0$. Explique esta aparente contradicción con el Teorema de Stokes.