MA2002: CÁLCULO AVANZADO Y APLICACIONES
PAUTA EJERCICIO 1

De acuerdo a la teoria de Yukawa para las fuerzas nucleares, la fuerza de atracción entre un neutrón y un protón tiene como potencial $U(r) = Ke^{-\alpha r}/r$ (en coordenadas esféricas) para ciertas constantes $K < 0$ y $\alpha > 0$.

1. **Encuentre la fuerza $\vec{F} = -\nabla U$ en $\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$.**

   Utilizando la fórmula del gradiente en coordenadas esféricas encontramos que

$$F = -U'(r)\hat{r} = \frac{\alpha K e^{\alpha r} r + K e^{-\alpha r}}{r^2}\hat{r} = U(r)\left(\alpha + \frac{1}{r}\right)\hat{r}$$

   (0.5 pt. por utilizar la fórmula del gradiente en coordenadas esféricas, 0.5 pt. por el cálculo).

2. **Calcule directamente el flujo de $\vec{F}$ a través de un casquete esférico de radio $r = a$, $a > 0$ orientado según la normal exterior.**

   Sea $B_a = B(0, a)$ la bola de centro cero y radio a, entonces:

$$\int_{\partial B_a} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} U(a)\left(\alpha + \frac{1}{a}\right) a^2 \sin\varphi d\theta d\varphi = 4\pi U(a)(\alpha a + 1)a = 4\pi K \frac{(\alpha a + 1)}{e^{\alpha a}}$$

   (0.5 pt. por plantear bien la integral, 1 pt. por el cálculo).

3. **Pruebe que $\triangle U = \alpha^2 U$ en $\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$.**

   Recordando que $\triangle U = \operatorname{div}(\nabla U)$, tenemos que $\triangle U = -\operatorname{div}(\vec{F})$. Luego, de la fórmula para la divergencia en coordenadas esféricas tenemos:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\vec{F}) &= \frac{1}{r^2 \sin(\varphi)} \frac{\partial}{\partial r}\left(U(r)\left(\alpha + \frac{1}{r}\right) r^2 \sin(\varphi)\right) \\
&= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(U(r)(\alpha r^2 + r)\right) \\
&= \frac{1}{r^2}\left(U'(r)(\alpha r^2 + r) + U(r)(2\alpha r + 1)\right) \\
&= \frac{U(r)}{r^2}\left((2\alpha r + 1) - \left(\alpha + \frac{1}{r}\right)(\alpha r^2 + r)\right) \\
&= \frac{U(r)}{r^2}\left((2\alpha r + 1) - \left(\alpha^2 r^2 + 2\alpha r + 1\right)\right) \\
&= -\alpha^2 U(r),
\end{aligned}$$

de donde se concluye que $\triangle U = \alpha^2 U$.
(0.5 pt. por $\triangle U = -\operatorname{div}(\vec{F})$, 1 pt. por el cálculo).

4. **Demuestre que si $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es un abierto acotado que contiene al origen, cuya frontera $\partial\Omega$ es una superficie regular por trozos y está orientada según la normal exterior, entonces**

$$\int\int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{A} = 4\pi K - \alpha^2 \int\int\int_{\Omega} U dV.$$

¿Contradice esto el teorema de la divergencia de Gauss? Explique.

Lo primero que hay que notar es que no se puede aplicar el teorema de la divergencia a Ω porque no se satisfacen todas las hipótesis. Sin embargo, podemos considerar $\Omega_a = \Omega \backslash B_a$ y notar que a este conjunto si se le puede aplicar el teorema de la divergencia. Entonces:

$$\int_{\partial\Omega_a} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_{\Omega_a} \operatorname{div}(\vec{F}) dV. \qquad (0.5\text{pt})$$

Ahora notemos que

$$\int_{\partial\Omega_a} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{A} + \int_{\partial B_a^-} \vec{F} \cdot d\vec{A}, \qquad (0.5\text{pt})$$

donde ∂B_a^- corresponde al casquete esférico de radio a orientado con la normal interior al casquete (o exterior a Ω_a), y de la parte 2 se sigue

$$\int_{\partial B_a^-} \vec{F} \cdot d\vec{A} = -4\pi K \frac{(\alpha a + 1)}{e^{\alpha a}}.$$

Mientras que de la parte 3 tenemos

$$\int_{\Omega_a} \operatorname{div}(\vec{F}) dV = -\alpha^2 \int_{\Omega_a} U dV,$$

y así

$$\int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{A} = 4\pi K \frac{(\alpha a + 1)}{e^{\alpha a}} - \alpha^2 \int_{\Omega_a} U dV. \qquad (0.3\text{pt})$$

Para concluir basta notar que:

$$\lim_{a\to 0} 4\pi K \frac{(\alpha a + 1)}{e^{\alpha a}} = 4\pi K \qquad (0.1\text{pt})$$

y

$$\lim_{a\to 0} \int_{\Omega_a} U dV = \int_{\Omega} U dV. \qquad (0.1\text{pt})$$

Por último, notemos que esta fórmula no contradice el teorema de Gauss, ya que el conjunto Ω no está contenido en un conjunto abierto $\mathcal{U}$, tal que F sea de clase C^1 en $\mathcal{U}$, de modo que no se tienen todas las hipótesis necesarias para aplicar el teorema de Gauss directamente a Ω. (0.5pt por la conclusión).