Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
(Ecuaciones Homogéneas y aplicaciones)

Julio López
jclopez@dim.uchile.cl

Depto Ingeniería Matemática, Universidad de Chile

Otoño 2011, Resumen clases

Ecuaciones del tipo:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right).$$

Distinguir 2 casos:

1. Las rectas $L_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ y $L_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$ se intersectan en (x_0, y_0).
2. Las rectas L_1 y L_2 son paralelas, i.e existe $k \in \mathbb{R}$ tal que
$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = k$$

Ecuaciones del tipo:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right).$$

Distinguir 2 casos:

1. Las rectas $L_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ y $L_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$ se intersectan en (x_0, y_0).
   Cambio de Variable: $\xi = x - x_0$, $\eta = y - y_0$. Así
   $$\underbrace{\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a_1\xi + b_1\eta}{a_2\xi + b_2\eta}\right)}_{\text{ec. homogénea}}.$$
2. Las rectas L_1 y L_2 son paralelas, i.e existe $k \in \mathbb{R}$ tal que
   $$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = k$$

Ecuaciones del tipo:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right).$$

Distinguir 2 casos:

1. Las rectas $L_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ y $L_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$ se intersectan en (x_0, y_0).
2. Las rectas L_1 y L_2 son paralelas, i.e existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = k$$

<u>Cambio de Variable:</u> $z = a_1x + b_1y \Rightarrow z' = a_1 + b_1y'$

$$\underbrace{z' = a_1 + b_1 f\left(\frac{z + c_1}{kz + c_2}\right)}_{\text{ec. variable separable}}$$

Ejemplo 1: $y' = \dfrac{-2x+4y-6}{x+y-3}$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{rcl} -2x+4y-6 &=& 0 \\ x+y-3 &=& 0 \end{array}\right. \Rightarrow \text{sol. única } (x_0, y_0) = (1,2).$$

Cambio de Variable: $\xi = x-1$, $\eta = y-2$

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{-2\xi+4\eta}{\xi+\eta} = \frac{-2+4\eta/\xi}{1+\eta/\xi}$$

Cambio de Variable: $z = \eta/\xi$ ($\Rightarrow \eta' = z + \xi z'$). Así

$$z + \xi z' = \frac{-2+4z}{1+z} \Leftrightarrow -\xi z' = \frac{z^2-3z+2}{z+1}$$

Sol. ctes: $z=1$, $z=2 \Rightarrow y = x+1$, $y = 2x$ (sol. particular de las EDO).

Asumiendo, $z^2 - 3z + 2 \neq 0$:

$$\frac{z+1}{z^2-3z+2}dz = -\frac{1}{\xi}d\xi \quad \Leftrightarrow \quad \left(-\frac{2}{z-1} + \frac{3}{z-2}\right)dz = -\frac{1}{\xi}d\xi.$$

Integrando y quitando el logaritmo nos da

$$\frac{(z-2)^3}{(z-1)^2} = \frac{c}{\xi}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Retornando a la variable original:

$$\frac{\left(\frac{y-2x}{x-1}\right)^3}{\left(\frac{y-x-1}{x-1}\right)^2} = \frac{c}{x-1}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow \frac{(y-2x)^3}{(y-x-1)^2} = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo 2: $y' = -\dfrac{x+y+1}{2x+2y-1}$

Solución: Las rectas son paralelas ¿Porque?

Cambio de Variable: $z = x + y$

$$z' = -\frac{z+1}{2z-1} + 1 = \frac{z-2}{2z-1}$$

- Sol. cte: $z = 2 \Rightarrow y + x = 2 \leftarrow$ sol. particular EDO
- Suponer $z \neq 2$:

$$\int \left(2 + \frac{3}{z-2}\right) dz = \int dx + c \Leftrightarrow 2z + 3\ln(z-2) = x + c$$

$$x + 2y + 3\ln(x+y-2) = c.$$

- $y = 2 - x$ es solución singular.

Ejemplo (1): $(x^2y^2 - 1)dy + 2xy^3dx = 0$
$M(x, y) = 2xy^3 \leftarrow$ homogénea grado 4
$N(x, y) = x^2y^2 - 1 \leftarrow$ no homogénea (por el 1).

Ejemplo (2): $y' = \dfrac{1}{2}\dfrac{y}{x} - 3\dfrac{\sqrt{x}}{y^2} = \dfrac{y^3 - 6x^{3/2}}{2xy^2}$
$M(x, y) = y^3 - 6x^{3/2} \leftarrow$ no homogénea (por término $x^{3/2}$)
$N(x, y) = 2xy^2 \leftarrow$ homogénea grado 3

¿Que hacer en estos casos?
Rpta: Hacer cambio variable $y = z^\alpha$, donde debemos encontrar $\alpha \in \mathbb{R}$ tq la E.D sea homogénea.

$$y' = \alpha z^{\alpha-1}z' \quad \text{ó} \quad dy = \alpha z^{\alpha-1}dz$$

Ejemplo (1) (continuación): $(x^2y^2-1)dy+2xy^3dx=0$

$$\Rightarrow \alpha(x^2z^{3\alpha-1}-z^{\alpha-1})dz+2xz^{3\alpha}dx=0$$

grado de $x^2z^{3\alpha-1}$: $3\alpha+1$
grado de $z^{\alpha-1}$: $\alpha-1$
grado de $xz^{3\alpha}$: $3\alpha+1$

Para que sea homogénea los grados deben ser iguales: $3\alpha+1=\alpha-1 \Rightarrow \alpha=-1$

Así, $y=1/z$. Luego

$$(\frac{1}{z^2}-\frac{x^2}{z^4})dz+\frac{2x}{z^3}dx=0$$

$$\Leftrightarrow (z^2-x^2)dz+2xzdx=0$$

Cambio variable: $z=ux \Rightarrow dz=udx+xdu$

$$u(u^2+1)dx+x(u^2-1)du=0 \ \ldots$$

Aplicaciones (Enfriamiento de cuerpos)

Ley de Enfriamiento de Newton

La rapidez con que se enfría un objeto es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la del medio ambiente que lo rodea.

$T(t) :=$ temperatura del objeto en el instante t.
$T_m(t) :=$ temperatura del medio ambiente en el instante t.
Ecuación Diferencial:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m), \quad k > 0.$$

Ejemplo: Una bola de cobre se calienta hasta una temperatura de $100^0 C$. Después, en el tiempo $t = 0$, se coloca en agua que se mantiene a una temperatura de $30^0 C$. Al término de 3 minutos la temperatura de la bola se reduce a $70^0 C$. Encontrar el tiempo en el que la temperatura de la bola se reduce a $31^0 C$.

Datos:

$T(t) :=$ temperatura de la bola en el instante t.

$$T_m(t) = 30,\ \ T(0) = 100,\quad T(3) = 70,\ \ ¿t : T(t) = 31?.$$

Así:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T-30) \Rightarrow \int \frac{1}{T-30} dT = -\int kdt + c_1.$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{T(t) = 30 + ce^{-kt}.}$$

- $T(0) = 100 \Rightarrow T(t) = 30 + 70e^{-kt}$.
- $T(3) = 70 \Rightarrow T(t) = 30 + 70e^{-0{,}1865t}$.
- $31 = 30 + 70e^{-0{,}1865t} \Rightarrow \boxed{t = 22{,}78}$.

Aplicaciones (Vaciado de un Tanque)

Ley de Torricelli

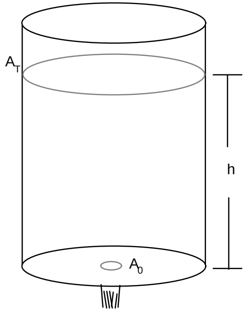
La velocidad de salida del agua a través de un orificio en el fondo de un tanque lleno hasta una altura, es igual a la velocidad de un objeto que cae libremente desde la misma altura.

$v(t) :=$ velocidad de salida del agua en el instante t.
$h(t) :=$ altura del tanque en el instante t.
$g :=$ aceleración de la gravedad $(9{,}8 m/s^2)$.

$$v(t) = \sqrt{2gh(t)}.$$

Modelación como EDO:
Idea: Relacionar la disminución del nivel del agua $h(t)$ con el flujo de salida.

Aplicaciones (Vaciado de un Tanque)



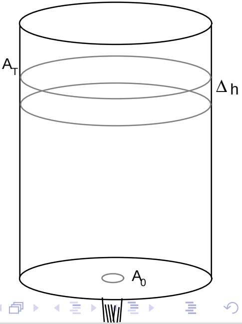
A_0 = Area transversal orificio.
A_T = Area transversal tanque.
Volumen ΔV del agua que sale con una velocidad v en un intervalo corto Δt es:

$$\boxed{\Delta V = A_0 v \Delta t}$$

Esto produce un decremento Δh del nivel del agua h, el cual debe ser tq el volumen correspondiente $A_T \Delta h$ es igual a ΔV. Así:

$$A_T \Delta h = -\Delta V = -A_0 v \Delta t,$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dh}{dt} = -\frac{A_0}{A_T}\sqrt{2gh}.}$$



Observación: En algunos modelos se considera:

$$\frac{dh}{dt} = -k\frac{A_0}{A_T}v(t) = -k\frac{A_0}{A_T}\sqrt{2gh(t)},$$

donde $k > 0$ depende de la forma del orificio: (circular $k = 0{,}6$).

Ejemplo: Un tanque cilíndrico de 1.5 metros de altura descansa sobre su base circular de 1 metro de diámetro e inicialmente se encuentra lleno de agua. En el fondo del tanque hay un orificio de 1cm de diámetro, el cual se abre en cierto instante, de tal modo que el agua empieza a fugarse debido a la fuerza de la gravedad. Encontrar la altura $h(t)$ del agua del tanque en cualquier tiempo t. Encontrar los tiempos en que el tanque tiene agua hasta la mitad, hasta la cuarta parte y cuando que vacío.

Datos:

$A_0 = (0{,}5)^2\pi$, $A_T = (50)^2\pi \Rightarrow \frac{A_0}{A_T} = 0{,}0001$; $\sqrt{2g} = 44{,}27\ (cm/s^2)$

Aplicaciones (Vaciado de un Tanque)

$$\frac{dh}{dt} = -0{,}004427h^{1/2} \Rightarrow h(t) = (c - 0{,}0022135t)^2.$$

- Como $h(0) = 150 \Rightarrow c = 12{,}25$
- Mitad: $h(t) = 75 \Rightarrow t = 1619$seg.
- Cuarta parte: $h(t) = 37{,}5 \Rightarrow t = 2766$seg.
- Vacío: $h(t) = 0 \Rightarrow t = 5534$seg.

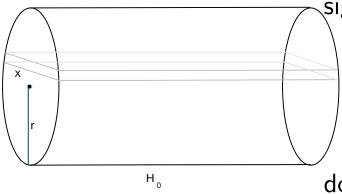
Cilindro en forma Horizontal

Un tanque de forma de un cilindro dispuesto en forma horizontal está inicialmente lleno de agua. La altura del cilindro es H_0 y el radio r. El tanque tiene un orificio en el fondo cuyo diámetro es ρ. Se abre el orificio y el líquido cae libremente.

Recordemos que la disminución del nivel del agua $h(t)$ con el flujo de salida viene dado por:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{A_0}{A_T}v(t) = -\frac{A_0}{A_T}\sqrt{2gh(t)}.$$

Vaciado de Tanques



Con los datos expuestos, tenemos las siguientes areas transversales:

$$A_0 = \pi(\frac{\rho}{2})^2,$$

$$A_T = 2xH_0,$$

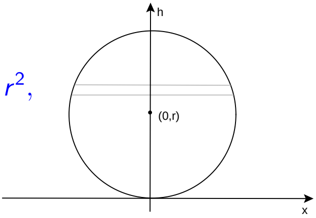
donde x es el ancho, el cual es variable en cada tiempo.

Como r es el radio del cilindro:

$$(x-0)^2+(h-r)^2 = r^2, \quad \Rightarrow \quad x^2+h^2-2rh+r^2 = r^2,$$

de donde

$$x = \sqrt{2rh - h^2}.$$



Con esto

$$A_T = 2\sqrt{2rh - h^2}H_0,$$

y así

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\pi\rho^2}{4\sqrt{2rh - h^2}H_0}\sqrt{2gh} = -\frac{\pi\rho^2}{4\sqrt{2r - h}H_0}\sqrt{2g}.$$

Luego,

$$\sqrt{2r - h}\,dh = -\frac{\pi\rho^2}{4H_0}\sqrt{2g}\,dt.$$

Esta ecuación tiene por solución:

$$\frac{2}{3}(2r - h)^{3/2} = \frac{\pi\rho^2}{4H_0}\sqrt{2g}\,t + c.$$