Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

(Ecuaciones de 2do Orden)

Julio López
jclopez@dim.uchile.cl

Depto Ingeniería Matemática, Universidad de Chile

Otoño 2011, Resumen clases

Operadores Diferenciales

- **Un operador** es una aplicación que transforma una función en otra función.
- **Un operador** T **es lineal** si $T(\lambda f + g) = \lambda Tf + Tg$, $\forall f, g \in H$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.
- **Un operador diferencial** es un operador que involucra solamente derivadas.

Sea $I \subset \mathbb{R}$. Recordar el conjunto:

$$\mathcal{C}^n(I) = \{f : I \to \mathbb{R} : f, f', \dots, f^{(n)} \text{ continuas en } I\}$$

Es claro que: $\mathcal{C}^0(I) \supset \mathcal{C}^1(I) \supset \mathcal{C}^2(I) \supset \dots \supset \mathcal{C}^n(I) \supset \dots$

Definimos el **operador derivada de orden 1** mediante

$$\begin{array}{rccc} D: & \mathcal{C}^1(I) & \to & \mathcal{C}(I) \\ & f & \mapsto & Df = \frac{d}{dx} f \end{array}$$

Operadores Diferenciales

Definimos el **operador derivada de orden 2** mediante

$$\begin{array}{rccl} D^2 : & \mathcal{C}^2(I) & \to & \mathcal{C}(I) \\ & f & \mapsto & D^2 f = D(Df) = \frac{d^2}{dx^2} f \end{array}$$

En general

Definimos el **operador derivada de orden 2** mediante

$$\begin{array}{rccl} D^n : & \mathcal{C}^n(I) & \to & \mathcal{C}(I) \\ & f & \mapsto & D^n f = (\underbrace{D \circ \ldots \circ D}_{n-\text{veces}})f) = \frac{d^n}{dx^n} f \end{array}$$

Obs. Si $T_1, T_2 : U \to V$ son operadores lineales y $\alpha \in \mathbb{R}$, $T_1 + T_2, \alpha T_1 : U \to V$ son también operadores lineales. En particular: $D + D^2 : \mathcal{C}^2(I) \to \mathcal{C}(I)$ es un operador lineal.

En general

$$P(x,D) = a_n(x)D^n + a_{n-1}D^{n-1}(x) + \ldots + a_0(x)D^0 : \mathcal{C}^n \to \mathcal{C}(I)$$

es un operador lineal, llamado **operador diferencial lineal de orden** n con coeficientes variables.

Si $f \in \mathcal{C}^n(I)$, entonces

$$P(x,D)[f(x)] = a_n(x)f^{(n)}(x) + \ldots + a_1(x)f'(x) + a_0(x)f(x).$$

Si los coeficientes a_k son todos constantes, denotaremos por:

$$P(D) = \sum_{k=0}^{n} a_k D^k = a_n D^n + \ldots a_1 D + a_0$$

llamado **operador diferencial lineal de orden** n **a coeficientes constantes**.

Ejemplo 1: Si $P(x,D) = D + 2x$, $f(x) = x^2$ entonces

$$P(x,D)f(x) = 2x + 2x^3.$$

Ejemplo 2: El núcleo del operador $P(x,D) = D + 2xD^0$ viene dado por

$$\mathrm{Ker}(P(x,D)) = \{ce^{-x^2} : c \in \mathbb{R}\}.$$

Teorema (Principio de Superposición)

Si $y_1, y_2, \ldots, y_n$ pertenecen al núcleo de $P(x,D)$, entonces la combinación lineal $\sum_{k=1}^{n} \alpha_i y_i$ está en el núcleo de $P(x,D)$.

Sean P_1, P_2 operadores diferenciales lineales de orden n_1 y n_2, resp., y sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Definimos

$$\begin{aligned} (P_1 + P_2)(f) &= P_1(f) + P_2(f) \\ (\alpha P)(f) &= \alpha P_1(f). \end{aligned}$$

Con estas operaciones los operadores diferenciales forman un esp. vect.

Producto de Operadores Diferenciales

El producto de operadores diferenciales se define como la composición:

$$P_1 P_2 = P_1 \circ P_2$$

Observación:

- $P_1 P_2$ es de orden $n_1 + n_2$.
- Con este producto y la suma definida antes, se forma una estructura de anillo.
- En general, el producto no es conmutativo, a menos que los operadores sean a coeficientes constantes.

Ejemplo: Considere los siguientes operadores diferenciales:

$$P_1(x, D) = D + xD^0, \quad P_2(x, D) = xD^2 + D + xD^0.$$

$P_1(x, D)P_2(x, D) = xD^3 + (x^2 + 2)D^2 + 2xD + (x^2 + 1)$
$P_2(x, D)P_1(x, D) = xD^3 + (x^2 + 1)D^2 + 4xD + (x^2 + 1).$

Producto de Operadores Diferenciales

Sea $y \in \mathcal{C}^2(I)$:

$$\begin{aligned}
P_1(x,D)P_2(x,D)[y] &= (D+x)(xD^2+D+x)[y] = (D+x)(xD^2y+Dy+x \\
&= D(xD^2y)+D(Dy)+D(xy)+x^2D^2y+xDy+x^2y \\
&= D^2y+xD^3y+D^2y+y+xDy+x^2D^2y+xDy+x^2 \\
&= xD^3y+(x^2+2)D^2y+2xDy+(x^2+1)y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_2(x,D)P_1(x,D)[y] &= (xD^2+D+x)(D+x)[y] = (xD^2+D+x)(Dy+xy \\
&= xD^2(Dy)+xD^2(xy)+D(Dy)+D(xy)+xDy+x^2y \\
&= xD^3y+xD(y+xDy)+D^2y+y+xDy+xDy+x^2 \\
&= xD^3y+xDy+x(Dy+xD^2y)+D^2y+2xDy+y+x \\
&= xD^3y+(x^2+1)D^2y+4xDy+(x^2+1)y
\end{aligned}$$

Por tanto $P_1(x,D)P_2(x,D) \neq P_2(x,D)P_1(x,D)$.

Definiciones

Una EDO lineal de orden n es una relación de la forma: $P(x, D)y = Q$ donde $P(x, D) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x)D^k$ operador diferencial lineal de orden n.

La ecuación es a coeficientes constantes si los coeficientes de P son constantes: $P(x, D) = \sum_{k=0}^{n} a_k D^k$

El **polinomio característico** asociado es $p(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k$ y sus raíces se llaman **valores característicos** de la EDO.

Se dice que y es solución de la ED $P(x, D)y = Q$ en I si $y \in \mathcal{C}^n(I)$ y $\sum_{k=0}^{n} a_k(x)y^{(k)}(x) = Q(x)$, $\forall x \in I$.

Sea $\bar{a}_i(x) = a_i(x)/a_n(x)$, para $i = 0, \ldots, n-1$.

Problema de Cauchy

Encontrar $y \in \mathcal{C}^n(I)$ tal que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y^{(n)} + \bar{a}_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + \bar{a}_0(x)y & = & \bar{Q}(x), \ \ x \in I \\ (y(x_0), y'(x_0), \ldots, y^{(n-1)}(x_0)) & = & (y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}). \end{array} \right.$$

Teorema (Existencia y Unicidad)

Supongamos que las funciones $\bar{a}_i(x)$, $\bar{Q}(x)$ son continuas en I. Entonces para cada $x_0 \in I$ y para cada vector de condiciones iniciales, el Problema de Cauchy tiene solución única.

Ejemplo: Considere el Problema de Valor inicial:

$$\begin{cases} (x^2-4)y'' + y' + \cos(x)y &= \frac{e^x}{x} \\ y(1) = y_0, \ y'(1) = y_0'. \end{cases}$$

Para esta ecuación $\bar{a}_1(x) = \frac{1}{x^2-4}$, $\bar{a}_0 = \frac{\cos(x)}{x^2-4}$, $\bar{Q}(x) = \frac{e^x}{x(x^2-4)}$.

Así $\bar{a}_1$, $\bar{a}_0$ y $\bar{Q}$ son continuas para $x \neq \pm 2, 0$. Como $x_0 = 1$, entonces el Problema de Cauchy tiene solución en $0 < x < 2$, que es el mayor intervalo conteniendo $x_0 = 1$, donde $\bar{a}_1$, $\bar{a}_0$ y $\bar{Q}$ son continuas.

Ecuación Lineal de 2do Orden

Son ecuaciones de la forma

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = Q(x)$$

Si $a_2(x) \neq 0$, entonces reducimos la EDO a:

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = q(x).$$

Consideremos la ED de 2do orden

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = q(x) \tag{1}$$

y su ecuación homogénea asociada

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \tag{2}$$

Sea $P(x, D) = D^2 + p_1(x)D + p_2(x)$ el operador asociado a (1).

Definición

El conjunto $\mathrm{Ker}(P(x, D)) = \{y \in \mathcal{C}^2(I) : P(x, D)[y] = 0\}$ es el conj. de soluciones de su ec. homogénea asociada (2). Además, el conjunto $(P(x, D))^{-1}[q(x)] = \{y \in \mathcal{C}^2(I) : P(x, D)[y] = q(x)\}$ es el conj. de soluciones de (1).

Teorema

$\mathcal{H}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{C}^2(I)$ de dimensión 2.

Teorema

1. Si (2) tiene una solución compleja $y(x) = u(x) + iv(x)$, entonces u, v son soluciones de (2).
2. Si y es solución de (2) y existe $x_0 \in I$ tal que $y(x_0) = y'(x_0) = 0$, entonces $y(x) = 0 \ \forall x \in I$.

Teorema

Consideremos la ED (1) y su ecuación homogénea asociada (2). Sean y_p, y_q soluciones de (1) (llamadas soluciones particulares) y sea y_h solución de (2) (llamada solución homogénea). Entonces

1. $y_p + y_h$ es solución de (1).
2. $y_p - y_q$ es solución de (2)

Considerar

$$y'' + ay' + by = q(x), \quad a, b \in \mathbb{R},\ q \in \mathcal{C}(I). \tag{3}$$

En notación de operadores diferenciales:

$$P(D)y = (D^2 + aD + b)y = q(x).$$

Asociamos a $P(D)$ el polinomio característico: $p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$.
Por el TF del álgebra, si λ_1, λ_2 son raíces de $p(\lambda)$:

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2).$$

Propiedad

El operador diferencial $P(D)$ se puede escribir como $(D - \lambda_1)(D - \lambda_2)$, donde λ_1, λ_2 son raíces de $p(\lambda)$.

Considere (3) escrito en la forma

$$(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)y = q(x). \tag{4}$$

Introduciendo la variable auxiliar: $z = (D-\lambda_2)y$, se obtiene sistema de 2 EDO lineales de 1er orden:

$$\begin{cases} (D-\lambda_1)z &= q(x) \\ (D-\lambda_2)y &= z(x). \end{cases}$$

Solucionando tales ecuaciones diferenciales, nos da:

$$\begin{aligned} z(x) &= e^{\lambda_1 x}\Big(\int e^{-\lambda_1 x} q(x)dx + c_1\Big), \quad c_1 \in \mathbb{R} \\ y(x) &= e^{\lambda_2 x}\Big(\int e^{-\lambda_2 x} z(x)dx + c_2\Big), \quad c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

De ambas expresiones tenemos (sol. general):

$$y(x) = \underbrace{c_2 e^{\lambda_2 x} + c_1 e^{\lambda_2 x}\int e^{(\lambda_1-\lambda_2)x}dx}_{\text{sol. homogénea } y_h} + \underbrace{e^{\lambda_2 x}\int e^{(\lambda_1-\lambda_2)x}\left(\int e^{-\lambda_1 x} q(x)dx\right)dx}_{\text{sol. particular } y_p}$$

Hay tres casos posibles:

1. Si $\lambda_1 = \lambda_2$:

$$c_1 e^{\lambda_2 x} \int e^{(\lambda_1-\lambda_2)x} dx = c_1 e^{\lambda_2 x} \int dx = c_1 x e^{\lambda_1 x}.$$

   Así

$$y(x) = c_1 x e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_1 x} + e^{\lambda_1 x} \int \int e^{-\lambda_1 x} q(x) dx dx.$$

2. Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$:

$$c_1 e^{\lambda_2 x} \int e^{(\lambda_1-\lambda_2)x} dx = \frac{c_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_2 x} e^{(\lambda_1-\lambda_2)x} = \tilde{c}_1 e^{\lambda_1 x}.$$

   Luego

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + e^{\lambda_2 x} \int e^{(\lambda_1-\lambda_2)x} \left(\int e^{-\lambda_1 x} q(x) dx \right) dx.$$

Suponer que $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ tq $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$. Entonces:

$$\begin{aligned} y_h(x) &= c_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(c_1 e^{i\beta x} + c_2 e^{-i\beta}) \\ &= e^{\alpha x}(c_1 \cos(\beta x) + ic_1 \mathrm{sen}(\beta x) + c_2 \cos(\beta x) - ic_2 \mathrm{sen}(\beta x)) \\ &= e^{\alpha x}(A \cos(\beta x) + B \mathrm{sen}(\beta x)). \end{aligned}$$

Teorema

La solución homogénea y_h de la EDO (3) a coeficientes constantes con valores característicos λ_1, λ_2, está dado por:

1. $y_h(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$, si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ con $\lambda_1 \neq \lambda_2$
2. $y_h(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$, si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$.
3. $y_h(x) = e^{\alpha x}(c_1 \cos(\beta x) + c_2 \mathrm{sen}(\beta x))$, si $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ con $\beta \neq 0$.

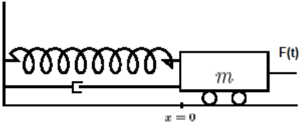
Ejemplos:

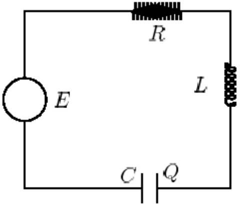
1) $4y'' - 4y' + y = 0 \Rightarrow y(x) = c_1 e^{\frac{x}{2}} + c_2 x e^{\frac{x}{2}}$, $\quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

2) $y'' - 2y' + 3y = 0 \Rightarrow y(x) = e^x(c_1 \cos(\sqrt{2}x) + c_2 \mathrm{sen}(\sqrt{2}x))$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Ejemplo: (Analogía Electromecánica)

Consideremos un sistema mecánico y un circuito eléctrico RCL





La ecuación diferencial que describen estos sistemas son:

$$x'' + \frac{b}{m}x' + \frac{k}{m}x = \frac{1}{m}F(t)$$

donde

m =masa del objeto

k =cte elasticidad resorte

b =cte amortiguamiento

F =fuerza externa

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t)$$

donde

E =fuerza electromotriz

R =resistencia

L =inductancia

C =capacitancia

q =carga

Ejemplo: (Analogía Electromecánica)

Mediante la identificación $m \sim L$, $b \sim R$ y $k \sim \frac{1}{C}$, son análogos tales sistemas.

- **Polinomio característico:** $p(\lambda) = \lambda^2 + \frac{b}{m}\lambda + \frac{k}{m}$
- **Raíces:** $\lambda = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\Delta}$, donde $\Delta = (\frac{b}{2m})^2 - \frac{k}{m}$.

Supondremos que $F(t) = 0$ ó $E(t)$. Existen 3 situaciones posibles:

(A) **Vibraciones Sobreamortiguadas:** Corresponde a $\Delta > 0$ (i.e $b > 2\sqrt{km}$). Las raíces son reales, negativas y distintas. La sol. es:

$$x_h(t) = c_1 e^{-(\frac{b}{2m} - \sqrt{\Delta})t} + c_2 e^{-(\frac{b}{2m} + \sqrt{\Delta})t}.$$

(B) **Vibraciones Críticamente Amortiguadas:** En este caso $\Delta = 0$ (i.e $b = 2\sqrt{km}$). La solución general es:

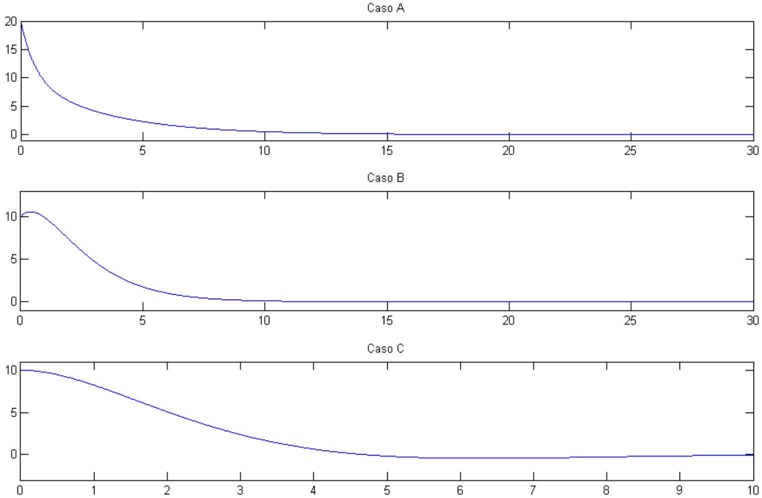
$$x_h(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-\frac{b}{2m}t}.$$

(C) **Vibraciones Subamortiguadas:** Corresponde a $\Delta < 0$ (i.e $b < 2\sqrt{km}$). La sol. general es:

$$x_h(t) = e^{-\frac{b}{2m}t}(c_1 \cos(\sqrt{-\Delta}t) + \operatorname{sen}(\sqrt{-\Delta}t)).$$

Gráfico de los 3 casos

Considerar $c_1 = c_2 = 10, \ k = 1, \ m = 2$



Definición(Condición de Frontera)

Es una o varias condiciones que se le colocan a una EDO en varios puntos.

Problema interesante: Determinar si existe alguna solución de una EDO de 2do orden que parta de un punto y llegue a otro predefinido.

- Aparece con frecuencia en física, ingeniería y economía.

Ejemplo: $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$.
Dependiendo del valor de λ se distinguen 3 casos:

1. Si $\lambda = 0$, $y'' = 0$. Así $y(x) = Ax + B$. De las condiciones de frontera se obtiene que $y(x) = 0$, $\forall x \in [0, 1]$.
2. Suponer que $\lambda = -w^2 < 0$. Luego, la solución es $y(x) = Ae^{wx} + Be^{-wx}$. Usando las condiciones de frontera se obtiene nuevamente que $y(x) = 0$, $\forall x \in [0, 1]$.
3. Si $\lambda = w^2 > 0$. Entonces, la solución es $y(x) = A\cos(wx) + B\text{sen}(wx)$. De las condiciones de frontera tenemos que si $w = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $y(x) = B\text{sen}(wx)$ es solución.