Guía de Ejercicios

1. Hallar la solución general de las ecuaciones diferenciales de 2do orden con coeficientes constantes:

   (a) $3y'' + 2y' + y = 0$.

   (b) $12y'' - 5y' - 2y = 0$.

   (c) $y'' + 3y - 5y = 0$.

   (d) $y'' - 6y' + 9y = 0$.

   (e) $y'' + 10y' + 25y = 0$.

2. Resolver los siguientes problemas de valor inicial

   (a) $y'' - 16y = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 20$.

   (b) $y'' + 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = -4,\ y'(0) = 14$.

   (c) $4y'' - 4y' - 3y = 0, \quad y(-2) = e,\ y'(-2) = -\frac{1}{2}e$.

   (d) $y'' - 8y' + 17y = 0, \quad y(0) = 4,\ y'(0) = -1$.

3. Para $0 < x < 1$, considere la ecuación diferencial

$$x(1-x^2)y'' - (1-x^2)^2y' + 5x^3y = 0.$$

   Demuestre que el cambio de coordenadas $t = -\frac{1}{2}\ln(1-x^2)$, transforma la ecuación en una ecuación con coeficientes constantes. Use esto para encontrar la solución general de la ecuación inicial.

4. Usando la transformación $t = \frac{e^x}{2}$ convierta la ecuación diferencial

$$4y'' + 4(e^x - 1)y' + e^{2x}y = 0$$

   en una ecuación con coeficientes constantes. Utilice esta transformación para resolver la ecuación diferencial.

5. Encontrar la solución general de la ecuación $y'' + 2y' + by = 0$, para $b > 1$, $b = 1$ y $b < 1$.

6. Considere la ecuación diferencial $y'' + 2ay' + y = 0$. Para que valores de a la solución $y(x)$ tiende a cero cuando $t \to +\infty$, independiente de las condiciones iniciales.

7. Basado en el Teorema de existencia y unicidad, determine un intervalo en los que PVI tienen una única solución, sin resolverlos:

   (a) $\begin{cases} (x^2-1)y'' + (x-2)y = x \\ y(0) = y_0, y'(0) = y_0' \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} (x^2-x)y'' + (x+1)y' + y = e^x \\ y(-1) = y_0, y'(-1) = y_0' \end{cases}$

8. (*Ecuación de Euler*) La ecuación diferencial

$$x^2y'' + a_1xy' + a_0y = 0, \ x > 0$$

donde a_1, a_0 son constantes, es llamada **Ecuación de Euler**. Haciendo el cambio de variable $x = e^t$, $u(t) = y(e^t)$ muestre que $xy' = u'$, $x^2y'' = u'' - u'$. Mediante esto, encuentre una EDO de 2do orden a coeficientes constantes para la variable u, y resuélvalo distinguiendo tres casos para las raíces de su polinomio característico. Que forma tendría la solución y?.

9. Aplique lo anterior para resolver las siguientes ecuaciones de Euler:

   (a) $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0$.

   (b) $x^2y'' + xy' + y = 0$.

   (c) $xy'' + y' = 0$.

   Observación: En la práctica a veces es conveniente buscar directamente soluciones particulares de la forma $y_p(x) = x^k$, obteniendo para k una ecuación de grado 2.

10. Considere la ecuación diferencial

$$(ax + b)^2y'' + a_1(ax + b)y' + a_0y = 0.$$

Mediante un cambio de variables, transformarla a una ecuación de Euler y resolverla. Aplicar esto a la ED

$$(x + 2)^2y'' + 3(x + 2)y' - 3y = 0.$$

11. Resolver los siguientes problemas con valores en la frontera

    (a) $y'' - 9y = 0, \quad y(-4) = y(4) = \cosh(12)$.

    (b) $y'' - 2y' + 2y = 0, \quad y(0) = -3, \ y(\pi/2) = 0$.

    (c) $y'' - 2y' = 0, \quad y(0) = -1, \ y(1/2) = e - 2$.

12. La desviación $g(t)$ de la concentración de glucosa desde su nivel base N_b en un cuerpo humano puede modelarse por la EDO

$$\ddot{g} + 2\alpha\dot{g} + w_0^2g = 0$$

donde $\alpha > 0$, $w_0 > 0$ y $g(0) = 0$, $\dot{g}(0) = \beta$, donde β es la tasa inicial (desconocida) de variación de glucosa.

    (a) Si $w_0 > \alpha$, determine $g(t)$ en términos de α, β y $w = \sqrt{w_0^2 - \alpha^2}$.

    (b) Suponga que un paciente llega a un hospital con nivel base de glucosa igual a $0.7[mg/cm^3]$ y entonces se le suministra una fuerte dosis de glucosa. Al cabo de 1, 2 y 3 horas se miden niveles de 1, 0.55 y 0.75 $[mg/cm^3]$, respectivamente. Verifique que si $\gamma = \mathrm{sen}(w)$, entonces necesariamente $\gamma = \pm 1/2$.

    (c) Bajo las condiciones del punto (b), pruebe que para ese paciente se tiene $w = 5\pi/6$, $\alpha = \frac{1}{2}\ln(12)$ y $\beta = \pi\sqrt{3}$.

13. Considere la ecuación $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$, y una función derivable $g(x)$ tal que $p_2(x) = [g'(x)]^2$. Pruebe que si la función $\frac{g''(x)+p_1(x)g'(x)}{p_2(x)}$ es constante, entonces el cambio de coordenadas $t = g(x)$ transforma la ecuación en una ecuación de coeficientes constantes.

14. Aplique este resultado para solucionar:

    (a) $y'' + (e^x - 1)y' + e^{2x}y = 0$.

    (b) $x(1-x^2)^2y'' - (1-x^2)^2y' + x^3y = 0$.

15. Encontrar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales por el método de coeficientes indeterminados:

    (a) $y'' + 10y' + 25y = 14e^{-5x}$.

    (b) $y'' - 2y' + 2y = e^x \mathrm{sen}(x)$.

    (c) $y'' - 3y' + 2y = 14\mathrm{sen}(2x) - 18\cos(2x)$.

    (d) $y'' + y = e^{-x}\mathrm{sen}(x) - e^{3x}\cos(5x)$.

    (e) $y'' + 4y = 8x^3 - 20x^2 + 16x - 18$.

    (f) $y'' + 8y = 5x + 2e^{-x}$.

    (g) $y'' + 3y' + 2y = (x^2+1)e^x\mathrm{sen}(2x) + 3e^{-x}\cos(x) + 4e^x$.

16. Determine una forma adecuada para una solución particular de la ecuación:

$$y'' + 2y' + by = xe^{-x}\mathrm{sen}(\sqrt{b-1}\,x), \quad b > 1.$$

17. Considere la ecuación

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0,$$

con $p_1, p_2 \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ y periódicas de período T. Supongamos que $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ es solución de la ecuación y satisface $y(0) = y(T)$, $y'(0) = y'(T)$. Demuestre que y es periódica.

18. En cada una de las siguientes ecuaciones, encuentre la 2da solución. Luego escriba la solución general. (En algunos casos tendrá que calcular una solución particular).

    (a) $(x^2-1)y'' = 6y$, $\quad y_1$ es un polinomio cúbico.

    (b) $(2x+1)y'' + (4x-2)y' - 8y = 0$, $\quad y_1(x) = e^{mx}$.

    (c) $(3x+2x^2)y'' - 6(x+1)y' + 6y = 0$, $\quad y_1$ polinomio lineal.

    (d) $xy'' + (2x-1)y' - 2y = 0$, $\quad y_1(x) = e^{mx}$, $x > 0$.

    (e) $(1+x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$, $\quad y_1$ polinomio lineal.

    (f) $y'' + \frac{1}{x}y' + (1 - \frac{1}{4x^2})y = 0$, $\quad y_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\cos(x)$, $x > 0$.

    (g) $(2x^2+3x+1)y'' + 2xy' - 2y = 0$, $\quad y_1(x) = x$, $x < -1$.

    (h) $y'' + \tan(x)y' + \cos^2(x)y = 0$, $\quad y_1(x) = \cos(\mathrm{sen}(x))$.

    (i) $(4x^2-x)y'' + 2(2x-1)y' - 4y = 0$, $\quad y_1(x) = \frac{1}{x}$.

    (j) $y'' - y' + e^{2x}y = 0$, $\quad y_1(x) = \mathrm{sen}(e^x)$.