MA2601-2 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Semestre 2011-01
Profesor: Julio López.
Auxiliares: Sebastián Reyes Riffo, Sebastián Román.

Clase auxiliar 06
29/abril

P2.

(a) Resuelva la siguiente EDO:

$$\begin{aligned} y'' + 4y' + 13y &= f(t) \\ y(0) &= 1 \\ y'(0) &= 0 \end{aligned}$$

donde $f(t) = e^t$.

(b) Para $a \in \mathbb{R}$ ¿Qué ocurre si $f(t) = e^t + \delta_a(t)$?

<u>*Sol.:*</u>

(a) denotamos por $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$. Usando el teorema 4 (*transformadas de una derivada*) calculamos:

$$\mathcal{L}\{y''(t)\}(s) = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - s$$
$$\mathcal{L}\{y'(t)\}(s) = sY(s) - y(0) = sY(s) - 1$$

Aplicando Transformada de Laplace en la EDO, basta reemplazar lo anterior y se obtiene:

$$\begin{aligned} [s^2Y(s) - s] + 4[sY(s) - 1] + 13Y(s) &= \frac{1}{s-1} \\ Y(s) &= \underbrace{\frac{s+4}{s^2+4s+13}}_{I} + \underbrace{\frac{1}{s-1}\frac{1}{s^2+4s+13}}_{II} \end{aligned}$$

Para encontrar $y(t)$, basta aplicar Antitransformada y se concluye. Sin embargo, es necesario determinar de qué funciones $f(t)$ y $g(t)$ los términos I y II son sus respectivas transformadas.

Notando que $s^2 + 4s + 13 = (s+2)^2 + 3^2$, el término I se puede escribir de la forma

$$I = \frac{s+4}{(s+2)^2+3^2} = \frac{s+2}{(s+2)^2+3^2} + \frac{2}{(s+2)^2+3^2}$$

y es claro (usando el *primer teorema de traslación*) que

$$\frac{s+2}{(s+2)^2+3^2} = \mathcal{L}\{e^{-2t}cos(3t)\}(s)$$
$$\frac{2}{(s+2)^2+3^2} = \frac{2}{3}\frac{3}{(s+2)^2+3^2} = \frac{2}{3}\mathcal{L}\{e^{-2t}sen(3t)\}(s)$$

Se concluye entonces que $I = \mathcal{L}\{e^{-2t}cos(3t)\}(s) + \frac{2}{3}\mathcal{L}\{e^{-2t}sen(3t)\}(s)$.

Para trabajar el término II, hay dos alternativas posibles:

- *Forma 1: fracciones parciales,*

$$\begin{aligned} II = \frac{1}{s-1}\frac{1}{s^2+4s+13} &= \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+4s+13} \\ &= \frac{s^2(A+B)+s(4A+C-B)+(13A-C)}{(s-1)(s^2+4s+13)} \end{aligned} \tag{1}$$

igualando coeficientes, se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} A+B&=0 \\ 4A+C-B&=0 \\ 13A-C&=1 \end{aligned}$$

cuya solución es $A = \frac{1}{18}$, $B = \frac{-1}{18}$, $C = \frac{-5}{18}$. Usando estos valores en (1), junto a que $s^2+4s+13 = (s+2)^2+3^2$ y el *primer teorema de traslación*:

$$\begin{aligned} II &= \frac{1}{18}\left[\frac{1}{s-1} - \frac{s+5}{(s+2)^2+3^2}\right] = \frac{1}{18}\left[\frac{1}{s-1} - \left(\frac{s+2}{(s+2)^2+3^2} + \frac{3}{(s+2)^2+3^2}\right)\right] \\ &= \frac{1}{18}\left[\mathcal{L}\{e^t\}(s) - \left(\mathcal{L}\{e^{-2t}cos(3t)\}(s) + \mathcal{L}\{e^{-2t}sen(3t)\}(s)\right)\right] \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} Y(s) &= I + II \\ &= \mathcal{L}\{e^{-2t}cos(3t)\}(s) + \frac{2}{3}\mathcal{L}\{e^{-2t}sen(3t)\}(s) + \frac{1}{18}\left[\mathcal{L}\{e^t\}(s) - \left(\mathcal{L}\{e^{-2t}cos(3t)\}(s) + \mathcal{L}\{e^{-2t}sen(3t)\}(s)\right)\right] \\ &= \frac{1}{18}\left[\mathcal{L}\{e^t\}(s) + 17\mathcal{L}\{e^{-2t}cos(3t)\}(s) + 11\mathcal{L}\{e^{-2t}sen(3t)\}(s)\right] \end{aligned}$$

y aplicando Antitransformada, se concluye que

$$y(t) = \frac{1}{18}\left[e^t + 17e^{-2t}cos(3t) + 11e^{-2t}sen(3t)\right]$$

- *Forma 2: convolución*,
notando que

$$\frac{1}{s-1} = \mathcal{L}\{e^t\}(s)$$
$$\frac{1}{s^2+4s+13} = \frac{1}{3}\mathcal{L}\{e^{-2t}sen(3t)\}(s)$$

y luego, por el *teorema 5 (transformada de una convolución)*

$$\frac{1}{s-1}\frac{1}{s^2+4s+13} = \mathcal{L}\{e^t\}(s)\ \frac{1}{3}\mathcal{L}\{e^{-2t}sen(3t)\}(s) = \frac{1}{3}\mathcal{L}\{(e^u * e^{-2u}sen(3u))(t)\}(s)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} Y(s) &= I + II \\ &= \mathcal{L}\{e^{-2t}cos(3t)\}(s) + \frac{2}{3}\mathcal{L}\{e^{-2t}sen(3t)\}(s) + \frac{1}{3}\mathcal{L}\{(e^u * e^{-2u}sen(3u))(t)\}(s) \end{aligned}$$

y aplicando Antitransformada se concluye

$$y(t) = e^{-2t}cos(3t) + \frac{2}{3}e^{-2t}sen(3t) + \frac{1}{3}(e^u * e^{-2u}sen(3u))(t)$$

(b) Se tiene el problema

$$\begin{aligned} y'' + 4y' + 13y &= e^t + \delta_a(t) \\ y(0) &= 1 \\ y'(0) &= 0 \end{aligned}$$

Recordamos que $\mathcal{L}\{\delta_a(t)\}(s) = e^{-as}$. Aplicando Transformada de Laplace a la EDO, por un desarrollo análogo a lo hecho en (a) se obtiene

$$Y(s) = I + II + \frac{e^{-as}}{s^2+4s+13}$$

Se sabe que $\dfrac{1}{(s+2)^2+3^2} = \dfrac{1}{3}\mathcal{L}\{e^{-2t}sen(3t)\}(s)$. Luego se tiene

$$\frac{e^{-as}}{s^2+4s+13} = \frac{1}{3}e^{-as}\mathcal{L}\{e^{-2t}sen(3t)\}(s) = \frac{1}{3}\mathcal{L}\{e^{-2(t-a)}sen(3(t-a))\}(s)$$

donde la última igualdad se tiene de aplicar el *segundo teorema de traslación.*

Se concluye (de forma análoga a lo visto en (a)) que

$$y(t) = e^{-2t}cos(3t) + \frac{2}{3}e^{-2t}sen(3t) + \frac{1}{3}(e^u * e^{-2u}sen(3u))(t) + \frac{1}{3}e^{-2(t-a)}sen(3(t-a))$$