CONTROL III MA 26A, 2006/1

Prof. M. del Pino, Prof. Aux. A. Contreras, C. Muñoz

Tiempo: 3 hrs.

(1) Considere la ecuación

$$y'' + xy' + \alpha x^2 y = 0, \quad x \in [0, \infty).$$

Demuestre que si $\alpha > \frac{1}{4}$, las soluciones de esta ecuación son oscilatorias, mientras que si $\alpha \leq \frac{1}{4}$ *no lo son.*

(2) (a) Resuelva, mediante el método de valores y vectores propios generalizados, el sistema 3×3

$$\vec{x}\,' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \vec{x}\ .$$

(b) Sean $\vec{x}_1(t)$, $\vec{x}_2(t)$ dos soluciones de un sistema $N \times N$ de la forma

$$\vec{x}\,' = A(t)\,\vec{x}\ ,$$

donde los coeficentes de la matriz $A(t)$ son funciones continuas en $\mathbb{R}$. Demuestre que si los vectores $\vec{x}_1(0)$, $\vec{x}_2(0)$ son paralelos, entonces los vectores $\vec{x}_1(t)$, $\vec{x}_2(t)$ también lo son, para todo t.

(3) (a) Calcule funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$ en $[0, \infty)$ tales que

$$\mathcal{L}(f_1(x))(s) = \ln \frac{s-3}{s+1} \ \text{ y } \ \mathcal{L}(f_2(x))(s) = \frac{1}{(s^2+1)^3}.$$

Para la primera, encuentre antes $x f_1(x)$.

(b) Resuelva mediante el método de transformada de Laplace, el problema de valores iniciales

$$y'' + y = f(x), \quad y(0) = 0, \ y'(0) = 0, \quad x \geq 0,$$

donde f satisface

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 2k \leq x < 2k+1, \\ 0 & 2k+1 \leq x < 2k+2 \end{cases} \quad \text{para } k = 0, 1, \ldots, 9,$$

y $f(x) = 1$ para todo $x \geq 20$.