Control 1 MA2601 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile. Semestre 2010-1
Profs. P. Felmer, F. Macías, A. Osses

Tiempo: 2 horas 15 minutos

P1.-

(i) (1 pto) Mostrar que $f(y) = y^{2/3}$ no satisface la condición de Lipschitz

$$\exists L > 0 \text{ tal que } \forall y, z \in I\!R \quad |y^{2/3} - z^{2/3}| \leq L|y - z|.$$

cerca del origen.

(ii) (2 ptos) Encuentre una solución y_1 no idénticamente nula de

$$y' = y^{2/3}, \quad y(0) = 0.$$

Note que la función $y_2 = 0$ idénticamente nula también es una solución. Combinando estas dos soluciones, encuentre otras dos nuevas soluciones y_3, y_4 que sean continuamente derivables en $I\!R$. Comente por qué no se tendría la unicidad de la solución.

(iii) (2 ptos) Resuelva la siguiente EDO por dos métodos:

$$y' = \frac{y}{2x} - \frac{3\sqrt{x}}{y^2}, \; x > 0$$

a) haciendo el cambio de variables $z = y^2$, b) haciendo el cambio de variables $z = y^3$.

(iv) (1 pto) Resuelva la EDO

$$y = x + y' - 3(y')^2.$$

Indicación: derive la ecuación. Puede expresar la solución de forma paramétrica.

P2.- Un embrión puede considerarse como una población de células que se multiplican, aumentando así paulatinamente de tamaño en el tiempo. Se ha observado que para un cierto tipo de embrión, las células se multiplican a un ritmo que decrece exponencialmente con el tiempo. Esto es, si y es el tamaño del embrión:

$$y' = \beta e^{-\alpha t} y$$

donde α y β son constantes positivas.

(i) (1 pto) Encuentre la solución general $y(t)$ de la EDO.

(ii) (1 pto) Si el tamaño inicial es $y_0 > 0$, encuentre la función $y(t)$ correspondiente y el tamaño límite del embrión cuando $t \to \infty$.

(iii) (1 pto) Si en $t = 1/\alpha$ el tamaño inicial se ha amplificado por un factor $K > 0$, muestre que el tamaño límite del embrión se amplifica por un factor $F = K^{\frac{e}{e-1}}$.

(iv) (3 ptos) Se sabe que la falta de un nutriente reduce el crecimiento del embrión como (tome $\alpha = \beta = 1$):

$$y' = e^{-t} y - d(t)$$

donde $d(t) = y_0 e^{-2t}$ con y_0 el tamaño inicial. Resuelva la ecuación y pruebe que la falta de ese nutriente reduce hasta en casi un 37 % el crecimiento límite del embrión. Indicación: $\int u\, e^u\, du$ es calculable explícitamente. $1/e \approx 0.368$.