

## Solución de Ecuaciones Nolineales

En general, existen dos tipos de algoritmos numéricos para resolver ecuaciones o sistemas de ecuaciones no lineales: *análisis incremental* y *análisis incremental-iterativo*.

### 1.- Análisis Incremental

El objetivo de este método es el de aproximar la no linealidad mediante funciones lineales definidas en intervalos específicos (Fig. 1).

$$\{\vec{P}\} = \lambda \{\vec{P}_{ref}\} = \sum_{i=1}^n d\vec{P}_i \quad (1)$$

$$\{\vec{\Delta}\} = \sum_{i=1}^n d\vec{\Delta}_i \quad (2)$$

$$\{\vec{\Delta}_i\} = \vec{\Delta}_{i-1} + d\vec{\Delta}_i \quad (3)$$

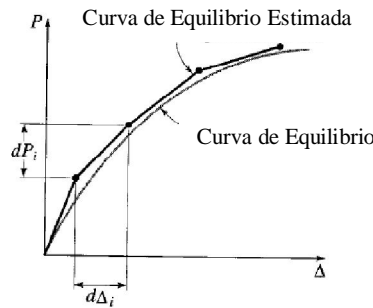
donde  $n$  es el número total de incrementos de carga,  $\{\vec{P}_{ref}\}$  es un valor de referencia de la carga  $\{\vec{P}\}$  y  $\{\vec{\Delta}\}$  es el desplazamiento total del sistema. El incremento en el vector desplazamiento  $\{d\vec{\Delta}_i\}$  debido a un incremento en el vector de cargas  $\{d\vec{P}_i\}$  se calcula como

$$\{d\vec{P}_i\} = [\vec{K}_i] \{d\vec{\Delta}_i\} \quad (4)$$

donde  $\{d\vec{P}_i\} = d\lambda_i \{\vec{P}_{ref}\}$  y  $[\vec{K}_i]$  es la matriz de rigidez (ponderada) asociada al incremento de carga definida como

$$[\vec{K}_i] = \sum_{j=1}^m \alpha_j [K_j] \quad (\text{promedio ponderado}) \quad (5)$$

donde  $\alpha_j$  son coeficientes y  $[K_j]$  es la rigidez calculada en puntos dentro del intervalo de incremento.



**Fig. 1. Análisis Incremental**

1.1.- Método de Euler

Este método considera a la matriz de rigidez ponderada como

$$[\bar{K}_i] = 1 \cdot [K_1] \tag{6}$$

donde la matriz  $[K_1]$  se calcula en la posición deformada utilizando las fuerzas que actúan en el sistema en el inicio del incremento. Este método también se conoce como Runge-Kutta de primer orden (Fig. 2(a)).

1.2.- Método de Runge-Kutta 2<sup>do</sup> orden

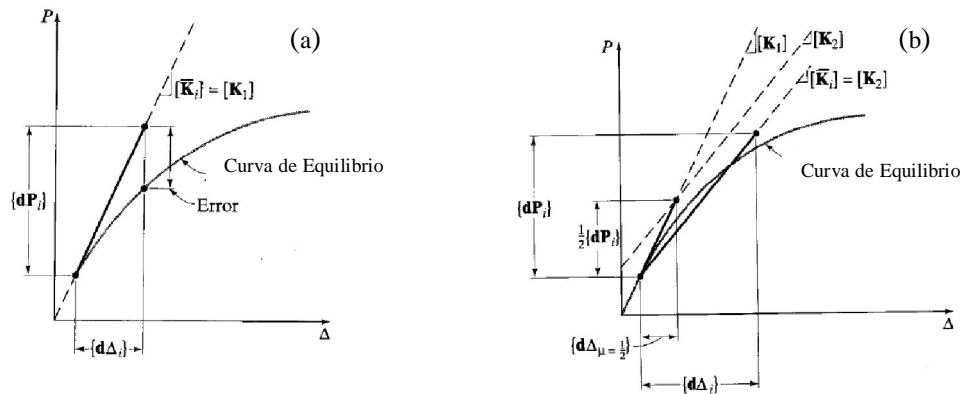
Este método considera  $m = 2$  en la Ec. (5). Esto implica que

$$[\bar{K}_i] = \alpha_1 \cdot [K_1] + \alpha_2 \cdot [K_2] \tag{7}$$

donde  $[K_1]$  se calcula al inicio del incremento y  $[K_2]$  se calcula en algún punto dentro del intervalo de incremento considerando las fuerzas y geometría deformada. Los desplazamiento en el punto 2 no se conocen al inicio del incremento  $i$  (Fig. 2(b)). Se determinan de la manera siguiente

$$\mu \{d\bar{P}_i\} = [K_1] \{d\Delta_\mu\} \quad 0 < \mu \leq 1. \tag{8}$$

$$\{\Delta_2\} = \{\Delta_{i-1}\} + \{d\Delta_\mu\} \tag{9}$$



**Fig. 2. (a) Método de Euler; (b) Método de Runge Kutta**

2.- Análisis Incremental-Iterativo

2.1.- Zeros de una función (Método de Newton)

Considerar una función escalar  $g(w)$ . Si se quieren encontrar los zeros de la función se plantea la ecuación  $g(w) = 0$ , que supongamos, representa la ecuación de equilibrio de un sistema. Una expansión de Taylor de la función  $g(w)$  en torno a un punto  $w_0$  resulta en

$$g(w) = g(w_0) + g'(w_0)(w - w_0) + \frac{1}{2} g''(w_0)(w - w_0)^2 + \dots \quad (10)$$

Reteniendo los dos primeros términos de la expresión anterior se obtiene

$$g(w) = g(w_0) + g'(w_0)(w - w_0) = \bar{g}(w) \quad (11)$$

donde  $\bar{g}(w)$  es una función lineal que es tangente a la curva  $g(w)$  en  $w_0$ . Entonces,

$$g(w) - g(w_0) = g'(w_0)(w - w_0) \quad (12)$$

pero  $g(w) = 0$ , por lo tanto

$$w = w_0 - \frac{g(w_0)}{g'(w_0)} \Rightarrow w_{k+1} = w_k - \frac{g(w_k)}{g'(w_k)} \quad (13)$$

En el punto  $w_0$  se puede evaluar la función  $g$  y su primera derivada y repetir el procedimiento anterior comenzando ahora desde el punto  $w_1$  en vez de  $w_0$ .

### 2.2.- Solución de un Sistema de Ecuaciones No lineales

El método de Newton-Raphson se basa en una solución iterativa de las ecuaciones no lineales linealizadas. Considerar un sistema de ecuaciones no lineales

$$\vec{g}(\vec{x}) = \vec{0} \quad (14)$$

donde  $\vec{g}(\vec{x}) \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  Las ecuaciones que componen el sistema definido por la Ec. (14) se linealizan en torno a un punto  $\vec{x}_0$  que no necesariamente satisface dicha ecuación.

$$\hat{\vec{g}}(\vec{x}) = \vec{g}(\vec{x}_0) + J_{\vec{g}}(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0) \quad (15)$$

donde

$$J_{\vec{g}}(\vec{x}_0) = \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{array} \right]_{x=\vec{x}_0} \quad (16)$$

es el Jacobiano del campo vectorial  $\vec{g}(\vec{x})$ . Si este campo vectorial representa un sistema de ecuaciones de equilibrio de un sistema en particular, el Jacobiano representa la matriz de rigidez tangente.

El método de Newton estima la solución de la Ec. (14) por medio de la solución de la  $\hat{\vec{g}}(\vec{x}) = \vec{0}$  (ver Ec. (15)). Por lo tanto, se cumple

$$\vec{g}(\vec{x}_0) + J_g(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0) = \vec{0} \quad (17)$$

$$\vec{x} = \vec{x}_0 - \left[ J_g(\vec{x}_0) \right]^{-1} \vec{g}(\vec{x}_0) \quad (18)$$

El nuevo punto puede que no satisfaga las ecuaciones de equilibrio. El procedimiento descrito por la Ec. (18) podría repetirse considerando ahora a  $\vec{x}$  como punto inicial. En forma genérica, la Ec. (18) se expresa como una fórmula recursiva

$$\vec{x}_{i+1} = \vec{x}_i - \left[ J_g(\vec{x}_i) \right]^{-1} \vec{g}(\vec{x}_i) \quad (19)$$

### 2.3.- Implementación del Método de Newton-Raphson

Se basa en la solución de un sistema lineal de ecuaciones. Sea  $J_g(\vec{x}_i) = [A_i]$  y

$\vec{b}_i = -\vec{g}(\vec{x}_i)$ , entonces

1. Seleccionar el valor de  $\vec{x}_0$ . Inicializar el contador  $i = 0$ .
2. Calcular el residuo  $\vec{b}_i$  y el Jacobiano  $[A_i]$  en el punto seleccionado.
3. Test de convergencia:  $\|\vec{g}(\vec{x}_i)\| < \text{tol}$  (tolerancia)
4. Solución del sistema de ecuaciones lineales
 
$$[A_i] \Delta \vec{x}_i = \vec{b}_i$$
5. Actualizar estimación
 
$$\vec{x}_{i+1} = \vec{x}_i + \Delta \vec{x}_i$$
6. Incrementar controlador
 
$$i \leftarrow i + 1$$

### 2.4.- Modificación del Método de Newton-Raphson

En ocasiones la eficiencia del método iterativo puede aumentarse reemplazando la matriz Jacobiana (matriz de rigidez)  $[A_i]$  usada en cada iteración por la matriz de rigidez  $[A_i^1]$  utilizada en la primera iteración asociada al incremento de carga correspondiente. En este caso se habla del método de Newton-Raphson con iteraciones a rigidez constante.

### 2.5.- Método de "Arc-length"

Considerar las ecuaciones de equilibrio de un sistema discreto que tienen la siguiente forma

$$\vec{g}(\vec{x}, \lambda) = \vec{0} \quad (20)$$

donde  $\vec{x}$  es el vector de desplazamiento y  $\lambda$  es un factor de carga. Este sistema de ecuaciones podría ser resuelto mediante el método de Newton-Raphson descrito anteriormente. Considerar la situación siguiente

- $\lambda = \lambda_0$ ; el factor de carga toma un valor inicial. Por lo tanto la Ec. (20) es resuelta por el método de Newton-Raphson generando el vector solución  $\vec{x}_0$ .
- $[J_g(\vec{x}, \lambda)] = [A(\vec{x}, \lambda)]$  es igual al Hessiano del funcional de energía  $\pi$  (energía potencial total). El método de Newton-Raphson falla en los puntos límites y de bifurcación. El incremento del factor de carga y la solución de la Ec. (20) y la obtención del incremento en el vector desplazamiento por el método de Newton-Raphson se denomina “*incremento a carga controlada*”. El algoritmo falla cuando el incremento de carga conlleva a que la carga total sea mayor que el punto límite (carga límite).

Un método o algoritmo alternativo al de “*incremento a carga controlada*” es el llamado “*método de longitud de arco*”. Este método, en vez de incrementar la carga, restringe la distancia entre la próxima estimación de la solución  $(\vec{x}, \lambda)$  y algún punto fijo  $(\vec{x}_n, \lambda_n)$  a un valor constante.

Considerar la restricción de ecuación escalar siguiente

$$c(\vec{x}, \lambda) = \|\vec{x} - \vec{x}_n\|^2 + (\lambda - \lambda_n)^2 - \alpha^2 = 0 \quad (21)$$

Por lo tanto, la Ecs. (20) y (21) generan un sistema de ecuaciones no lineales con (N+1) incógnitas  $(\vec{x}, \lambda)$  y (N+1) ecuaciones. Se linealiza el sistema de ecuaciones no lineales en torno a  $(\vec{x}^v, \lambda^v)$

$$\hat{g}(\vec{x}, \lambda) = \vec{g}(\vec{x}^v, \lambda^v) + \nabla_{\vec{x}} \vec{g}(\vec{x}^v, \lambda^v)(\vec{x} - \vec{x}^v) + \nabla_{\lambda} \vec{g}(\vec{x}^v, \lambda^v)(\lambda - \lambda^v) \quad (22)$$

$$\hat{c}(\vec{x}, \lambda) = c(\vec{x}^v, \lambda^v) + \nabla_{\vec{x}} c(\vec{x}^v, \lambda^v)(\vec{x} - \vec{x}^v) + \nabla_{\lambda} c(\vec{x}^v, \lambda^v)(\lambda - \lambda^v) \quad (23)$$

donde el método de Newton-Raphson puede utilizarse para resolver el sistema de ecuaciones considerando

$$\hat{g}(\vec{x}, \lambda) = \vec{0} \quad (24a)$$

$$\hat{c}(\vec{x}, \lambda) = 0 \quad (24b)$$

Considerar  $\vec{\theta} = [\vec{x}, \lambda]$ , por lo tanto

$$[A^v] = \begin{bmatrix} \nabla_{\vec{x}} \vec{g}(\vec{x}^v, \lambda^v) & \nabla_{\lambda} \vec{g}(\vec{x}^v, \lambda^v) \\ \nabla_{\vec{x}} c(\vec{x}^v, \lambda^v) & \nabla_{\lambda} c(\vec{x}^v, \lambda^v) \end{bmatrix}; \vec{b}^v = \begin{Bmatrix} -\vec{g}(\vec{x}^v, \lambda^v) \\ -c(\vec{x}^v, \lambda^v) \end{Bmatrix} \quad (25)$$

Se debe resolver el sistema de ecuaciones lineales siguiente

$$[A^v] \Delta \vec{\theta}^v = \vec{b}^v \quad (26a)$$

$$\Delta \vec{\theta}^v = [A^v]^{-1} \vec{b}^v \quad (26b)$$

$$\vec{\theta}^{v+1} = \Delta \vec{\theta}^v + \vec{\theta}^v \quad (26c)$$

Para comenzar este proceso de iteración, se debe definir un valor inicial del vector solución  $\vec{\theta}$ , i.e.,  $\vec{\theta}^0 = [x^0, \lambda^0]$ . Este valor inicial debe satisfacer las ecuaciones de equilibrio, de manera de definir la restricción del método “longitud de arco”:

$$\|\vec{b}^v\| = \sqrt{\|\vec{g}(x^v, \lambda^v)\|^2 + |c(x^v, \lambda^v)|^2} < \text{tol.}$$

### 2.6.- Implementación del Método de Newton-Raphson con restricción de “longitud de arco”

1. Seleccionar los valores de tol,  $\alpha$ , número máximo de iteraciones, contador n de incremento de carga. Inicializar el valor de n = 0.
2. Seleccionar un valor de  $\vec{\theta}_0$  y una dirección  $\vec{d}_0$  en la cual moverse, de manera que  $\vec{\theta}_0$  satisfaga las ecuaciones de equilibrio y  $\|\vec{d}_0\| = \alpha$ .
3. Inicializar iteración (en general)
  - $\vec{\theta}^0 = \vec{\theta}_n + \vec{d}_n$  ; donde  $\vec{\theta}_n$  es el último punto en que convergió el método.
  - $v = 0$
  - $\vec{d}_n$  satisface la condición de longitud de arco.
4. En el estado  $\vec{\theta}^v$  calcular
  - $[A^v]$  y  $\vec{b}^v$  (Ec. 25)
  - Test de convergencia:  $\|\vec{b}^v\| < \text{tol.}$
  - Resolver  $[A^v] \Delta \vec{\theta}^v = \vec{b}^v$
  - Actualizar estimación  $\vec{\theta}^{v+1} = \Delta \vec{\theta}^v + \vec{\theta}^v$
  - Aumentar contador  $v \leftarrow v + 1$
5. Actualizar convergencia
  - $\vec{\theta}_{n+1} \leftarrow \vec{\theta}^v$
  - $\vec{d}_{n+1} = \vec{\theta}_{n+1} - \vec{\theta}_n$
6. Aumentar contador de carga
  - $n \leftarrow n + 1$