

# Principios fundamentales de fuerza y stress

<http://www.cec.uchile.cl/~srebolle>

## Fuerza y stress

Los movimientos dentro del manto y la corteza, activados termal y gravitacionalmente, son las causas principales de las fuerzas y campos de stress que resultan en el desarrollo de pliegues, fallas y estructuras menores de diferentes tipos.

Para entender los procesos mecánicos que originan estas estructuras, se debe introducir los conceptos de fuerza y stress.

## Fuerza

La fuerza es usualmente definida como cualquier acción que altera o tiende a alterar el estado de reposo de un cuerpo o su movimiento a velocidad constante.

Cuando una fuerza actúa en un cuerpo, ésta puede ser especificada completamente si uno conoce:

- su dirección de acción en el espacio
- su magnitud

La fuerza es, por consiguiente, un vector.

La magnitud de una fuerza es medida por su efecto. Así, uno puede medir una fuerza por en peso que soportará. En dinámica, que es la rama de la mecánica que estudia el movimiento, la magnitud de una fuerza es medida por el movimiento que inducirá en un tiempo dado. Esto queda muy bien expresado por la Segunda Ley de Newton que sostiene:

$$F = ma.$$

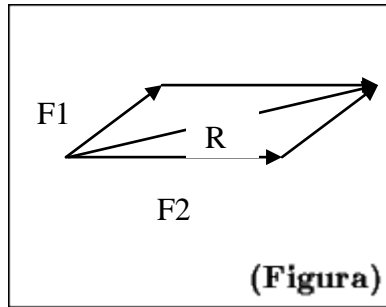
Si se considera la aceleración de gravedad ( $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ ), la fuerza ejercida por una masa de 1 kg que reposa en superficie de la tierra es de 9,81 Newton.

Algunas unidades de fuerza son:

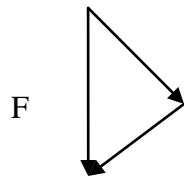
$$\text{Newton} = 1 \left[ \frac{\text{kg} * \text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

$$\text{Dyna} = 1 \left[ \frac{\text{gr} * \text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

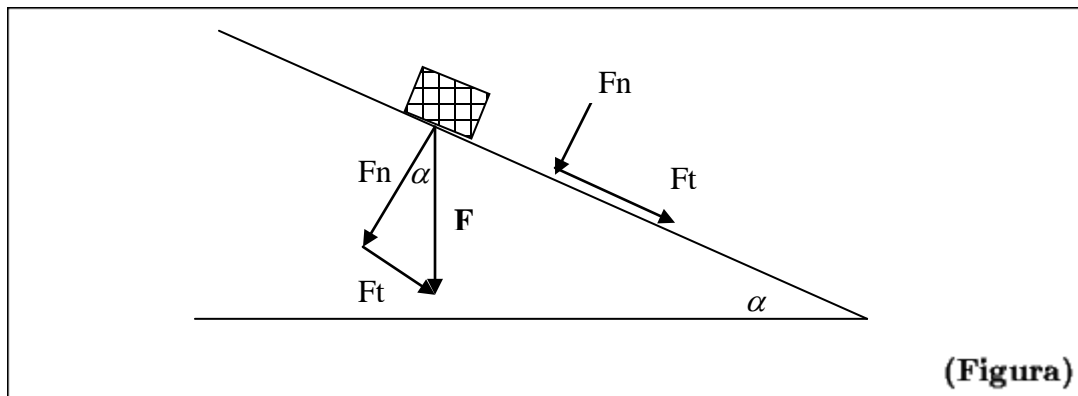
Si dos fuerzas actúan en un punto, entonces al ser vectores, ellas pueden ser combinadas gráficamente por el paralelogramo de fuerzas:



De manera análoga, una fuerza puede ser descompuesta en dos o más componentes. Esto último puede ser realizado de infinitas formas, pero en la mayoría de los análisis es necesario (o conveniente) resolver las fuerzas en dos direcciones perpendiculares entre sí.



Por ejemplo, la figura siguiente muestra una partícula rectangular, de masa M, descansando sobre un plano inclinado  $\phi$  grados con respecto a la horizontal.



La fuerza  $\vec{F}$  generada por esta masa M en el campo gravitacional actúa verticalmente. La magnitud de la componente de fuerza que actúa tangencialmente a la superficie inclinada y que tiende a desestabilizar el cuerpo ( $F_t$ ), está dada por:

$$F_t = F \sin \alpha \quad (6.1)$$

La magnitud de la componente normal al plano inclinado es:

$$F_n = F \cos \alpha \quad (6.2)$$

Si el ángulo  $\alpha$  es pequeño, la componente desestabilizadora es también pequeña y la partícula de masa M no deslizará debido a la resistencia al movimiento generada por una fuerza friccional.

Si el ángulo  $\alpha$  es gradualmente aumentado,  $F_t$  también aumenta y  $F_n$  disminuye. Cuando el ángulo  $\alpha$  alcanza un valor crítico  $\phi$  la resistencia al movimiento es sobrepasada y la partícula comienza a deslizarse. Este ángulo crítico es característico de los materiales que constituyen el plano inclinado y la partícula.

Experimentalmente se ha demostrado que cuando dos cuerpos están en contacto a lo largo de una superficie plana, la fuerza friccional que tiende a impedir el movimiento es proporcional a la reacción normal, o fuerza normal, que actúa en la superficie. Esta razón constante es denominada **coeficiente de fricción interna**  $\mu$  :

$$\mu = \frac{F_t}{F_n} = \frac{F \sin \phi}{F \cos \phi} = \tan \phi \quad (6.3)$$

Como veremos más adelante, el concepto de fricción juega un importante papel en la mecánica de movimientos en fallas y fracturas.

## Stress

Si un cubo de granito de lado = 25 cm se sometiera a una fuerza compresiva de 10000 kg (10 toneladas), igualmente distribuida en toda la cara, sólo se observaría una deformación infinitesimal (strain). Sin embargo, si se aplicara la misma carga a un cubo del mismo material, pero de lado = 1/20 del largo anterior, es decir de lado = 1.25 cm, el cubo menor sería pulverizado por la acción de esta fuerza. La magnitud de la fuerza aplicada es la misma en ambos casos y la diferencia de comportamiento en los dos cubos es el resultado de la diferencia de **stress** inducido por la fuerza en cada caso.

**Stress** se define como fuerza por unidad de área:

$$S = \frac{F}{A} = \sigma \quad (6.4)$$

### Unidades de stress

$$1 \left( \frac{N}{m^2} \right) = 1 Pa (\text{pascal})$$

$$1(Pa) = 0.1 \left( \frac{KN}{cm^2} \right)$$

$$1(\text{bar}) = 0.1(MPa)$$

$$1(MPa) = 10 \frac{kgf}{cm^2}$$

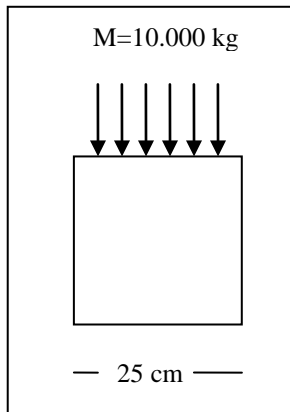
### Prefijos

$$\text{kilonewton (kN)} = 1000 N = 10^3 N$$

$$\text{Meganewton (MN)} = 1000000 N = 10^6 N$$

$$\text{Giganewton (GN)} = 1000000000 N = 10^9 N.$$

En el ejemplo anterior el stress en el cubo grande fue:  
( $S=F/A$ ;  $F=m*a$ )

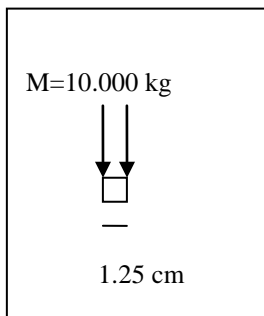


$$S = \frac{10000 \text{ (kg)} \times 9,81 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)}{25 \times 25 \text{ (cm}^2\text{)}}$$

$$S = 1569600 \left(\frac{\text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{\text{m}^2}\right) = 1569600 \left(\frac{\text{N}}{\text{m}^2}\right)$$

$$S = 1,6 \text{ (MPa)}.$$

En el cubo pequeño:



$$S = \frac{10000 \text{ (kg)} \times 9,81 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)}{1,25 \times 1,25 \text{ (cm}^2\text{)}}$$

$$S = 627840000 \left(\frac{\text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{\text{m}^2}\right) = 627840000 \left(\frac{\text{N}}{\text{m}^2}\right)$$

$$S = 627 \text{ (MPa)}.$$

Se puede ver entonces que el stress en el cubo pequeño excede la resistencia a la compresión del granito, en cambio en el cubo grande, el stress aplicado no es suficiente para romper el cubo. La resistencia a la compresión uniaxial teórica del granito es de 100 a 200 MPa.

En el ejemplo mencionado, se asumió que la dirección de acción de la fuerza era perpendicular a la superficie del cubo y por lo tanto, no había componente de fuerza actuando tangencialmente a las superficies del cubo. El stress que actúa perpendicular a una superficie se define como **stress principal** cuando el stress de cizalle total actuando en esa superficie es **cero**.

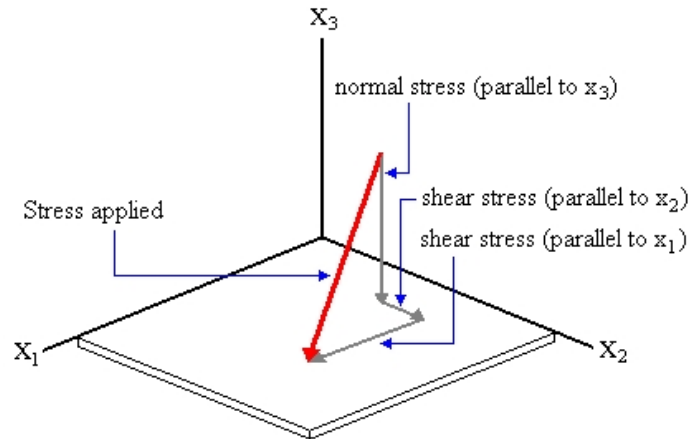
Si hay sólo un stress principal actuando en un cuerpo y éste es compresivo, se denomina **compresión uniaxial**. Si hay dos o más stresses actuando en un cuerpo, la condición se denomina **compresión biaxial o triaxial**, respectivamente.

Las direcciones en las que actúan los stresses principales son siempre ortogonales entre sí.

## Tensor de stress

### Stress en un plano

Un stress cualquiera aplicado a un plano puede ser resuelto en tres componentes:



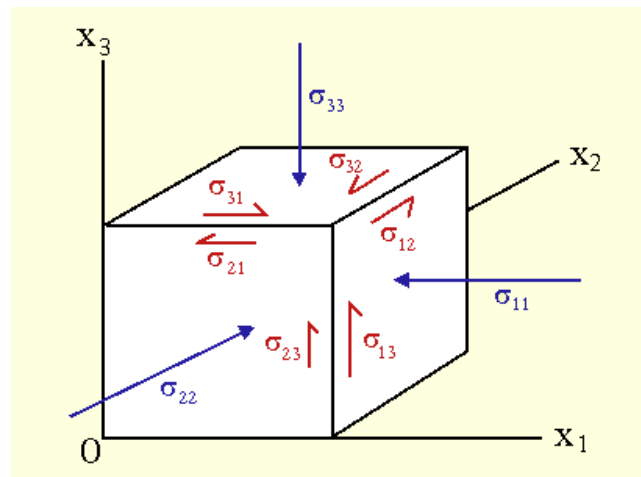
El stress puede ser expresada en términos de un stress normal (stress perpendicular al plano), y dos stresses de cizalle (paralelos al plano en las dos direcciones ortogonales del sistema de ejes elegido).

Para resolver el problema, se requiere simplificar y se realiza mediante el análisis de stress en un punto.

(El stress a través de un volumen puede variar).

### Stress en un punto

Se considera un punto como un cubo infinitamente pequeño, es obvio que un cubo tiene seis caras, o tres pares de planos como caras, de las cuales se considerarán tres porque las otras tres caras paralelas son idénticas.



En el diagrama se muestra el stress en cada cara, en términos de tres vectores del stress. Resultan 9 stresses, los cuales se pueden expresar en una matriz general de stress.

Tensor de stress.

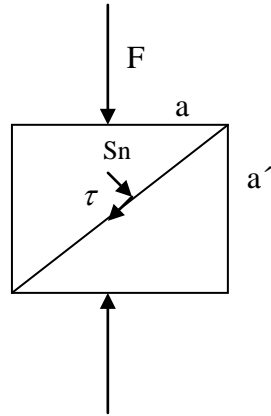
$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

Si el cubo está en el equilibrio (no rota), entonces  $\sigma_{21} = \sigma_{12}$ ,  $\sigma_{31} = \sigma_{13}$  y  $\sigma_{32} = \sigma_{23}$ . Así, hay solamente seis componentes independientes del tensor de stress (tensor simétrico).

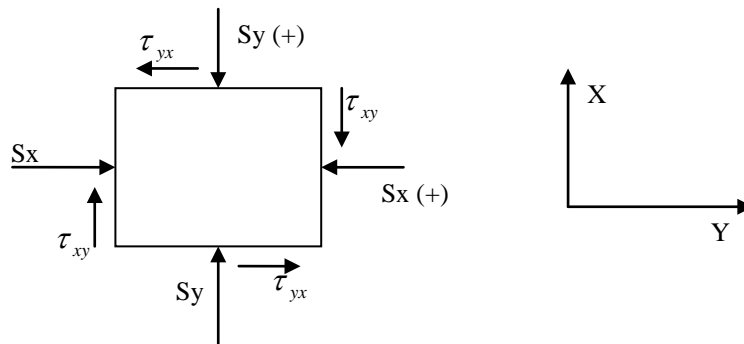
Si el cubo se orienta de manera tal que el stress principal que actúa en la cara es normal a uno de los planos, los stresses de cizalle se hacen 0 y el Tensor se reduce a:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

Si consideramos en un cuerpo un plano tal que se encuentra inclinado con respecto a la dirección de la fuerza aplicada o stress principal, es claro que la fuerza  $\vec{F}$  puede descomponerse en una componente actuando normal y otra paralela al plano interno. Estas se corresponden con un stress normal ( $S_n$ ) y otro de cizalle ( $\tau$ ).



A menudo es conveniente representar los stresses en un sistema de tres coordenadas que posea una coordenada vertical y las otras dos en un plano horizontal. Por convención, el subíndice z se usa para indicar el stress que actúa en la vertical ( $S_z$ ). Los otros dos stresses, que actúan paralelos a las direcciones X e Y son ( $S_x$ ) y ( $S_y$ ). Cuando se usa esta terminología, los stresses  $S_x$ ,  $S_y$  y  $S_z$  no son necesariamente stresses principales. Los stresses de cizalle también pueden ser representados en el mismo sistema de coordenadas. La nomenclatura usada se muestra en la figura. El primer subíndice indica la dirección del esfuerzo normal asociado y el segundo la dirección de acción del stress de cizalle.



Por convención, los stresses normales compresivos son considerados positivos y los de tracción negativos. Los stresses de cizalle que actúan en sentido de los punteros del reloj son negativos (producen rotación horaria) y los que actúan en sentido antihorario son considerados positivos (rotación antihoraria).

Cuando se analiza procesos mecánicos pertinentes al desarrollo de estructuras geológicas, es usual asumir en trabajos con stress que el elemento rota tan lentamente que puede ser considerado irrotacional.

Si un stress de cizalle ( $\tau$ ) actúa sobre todos los lados de largo  $a$  de un elemento, la fuerza de cizalle en los lados AB y CD tiene magnitud  $\tau_{xy} * a$ . Como estas fuerzas actúan a una distancia  $a$ , forman un par de fuerzas capaces de hacer rotar el cuerpo.

Se asume que el cuerpo no rota y que está en equilibrio:

$$\tau_{yx} = -\tau_{xy}$$

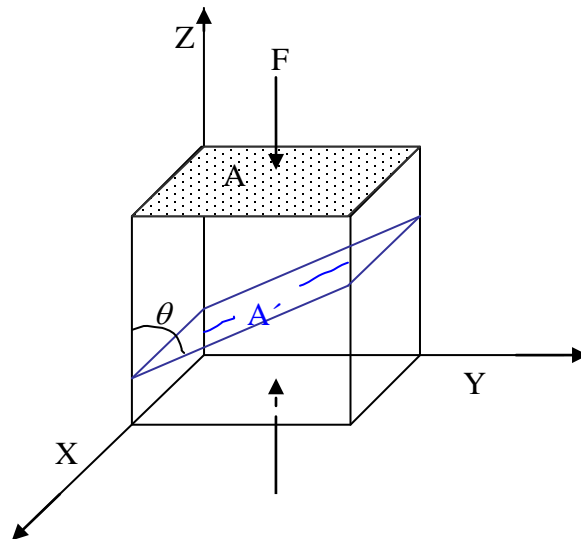
Así, en problemas bidimensionales sólo tres stresses son requeridos ( $S_x$ ,  $S_y$  y  $\tau$ ) para definir completamente un sistema de stress que actúa en un elemento.

Lo anterior demuestra que en problemas bidimensionales, si se conoce  $S_x$ ,  $S_y$  y  $\tau$  actuando en dos superficies, es posible calcular la orientación y magnitud de los dos stresses principales.

Si se conoce la magnitud y orientación de los stresses principales, se puede determinar fácilmente los valores de los stresses normales y de cizalle actuando en un plano que forma un ángulo  $\theta$  con el eje de stress principal.

Consideremos un prisma rectangular sometido a compresión uniaxial. Una fuerza  $F$  actúa normal a las superficies superior e inferior del prisma, que tienen un área  $A$  (cada una).

$$\text{Stress principal} = S_z = \frac{F}{A}$$





Si consideramos la superficie interna, orientada de manera que forma un ángulo  $\theta$  con el eje de stress principal, se puede ver que la fuerza  $F$  tiene una componente  $F_n$  normal a la superficie interna tal que

$$F_n = F \sin \theta$$

$$\sin \theta = \frac{F_n}{F}$$

$$\cos \theta = \frac{F_t}{F}$$

De manera análoga, la fuerza  $F$  tiene una componente de cizalle  $F_t$  paralela a la superficie, tal que:

$$F_t = F \cos \theta$$

En la figura se puede ver que el área  $A'$  del plano interno es mayor que el área  $A$  de las caras externas del prisma:

$$A' = \frac{A}{\sin \theta}$$

Usando estas relaciones, se puede determinar el stress normal ( $S_n$ ) actuando en el plano interno.

$$S_n = \frac{F_n}{A'} = \frac{F \sin \theta}{\frac{A}{\sin \theta}} = \frac{F}{A} \sin^2 \theta = S_z \sin^2 \theta$$

⇒

$$S_n = S_z \sin^2 \theta \quad (6.7)$$

El stress de cizalle en el plano interno será:

$$\tau = \frac{F_t}{A'} = \frac{F \cos \theta}{\frac{A}{\sin \theta}} = S_z \sin \theta \cos \theta$$

⇒

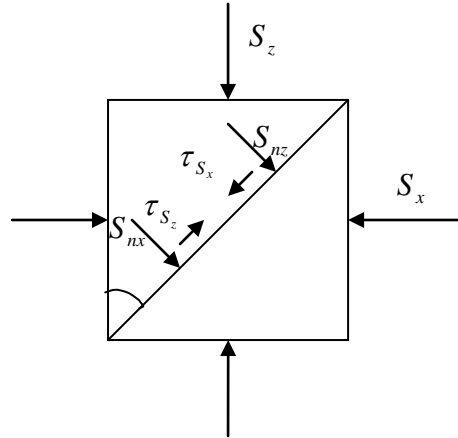
$$\tau = S_z \sin \theta \cos \theta \quad (6.8)$$

Las ecuaciones (6.7) y (6.8) son las ecuaciones de stress uniaxial y dan el stress normal y de cizalle en cualquier plano inclinado un ángulo  $\theta$  con respecto al stress principal.

## Compresión biaxial

Consideremos ahora la condición de compresión biaxial. El stress normal que actúa sobre la superficie interna ( $S_n$ ) tiene dos componentes de stress normal, una debido a  $S_x$

y la otra a  $S_z \implies S_n = S_{nz} + S_{nx}$ .



En el caso uniaxial  $S_{nz} = S_z \sin^2 \theta$ .

De manera análoga y a partir de la figura:

$$S_x = \frac{F_x}{A}$$

$$S_{nx} = \frac{F_{nx}}{A'} = \frac{F_x \cos \theta}{A'}$$

$$\cos \theta = \frac{A}{A'} \implies A' = \frac{A}{\cos \theta}$$

$$S_{nx} = \frac{F_x \cos \theta}{\frac{A}{\cos \theta}} = S_x \cos^2 \theta$$

$\implies$

$$S_n = S_{nz} + S_{nx} = S_z \sin^2 \theta + S_x \cos^2 \theta \quad (6.9)$$

Si los stresses principales son compresivos y  $S_z > S_x$ , entonces las componentes de cizalle  $\tau_x$  y  $\tau_z$  tienen distinto sentido (en el plano).

El stress de cizalle total será:  $\tau_z - \tau_x = \tau$ . Aplicando la ecuación del caso uniaxial queda:

$$\tau = (S_z - S_x) \sin \theta \cos \theta \quad (6.10)$$

Las ecuaciones (6.9) y (6.10) son las ecuaciones de stress biaxial.

Siempre es conveniente expresar las ecuaciones en términos del ángulo doble.

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \Rightarrow \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta$$

La ecuación (6.10) queda

$$\tau = \frac{S_z - S_x}{2} \sin 2\theta \quad (6.11)$$

Sabemos también que

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta &= \cos 2\theta \\ \sin^2 \theta + \cos^2 \theta &= 1. \end{aligned}$$

Sumando estas ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2 \cos^2 \theta &= 1 + \cos 2\theta \\ \Rightarrow \cos^2 \theta &= \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \end{aligned}$$

Y restándolas:

$$2 \sin^2 \theta = 1 - \cos 2\theta \quad \Rightarrow \quad \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (6.9):

$$S_n = S_{nz} + S_{nx} = S_z \sin^2 \theta + S_x \cos^2 \theta$$

$$S_n = S_z \left( \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right) + S_x \left( \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right)$$

$$S_n = \frac{S_z}{2} - \frac{S_z \cos 2\theta}{2} + \frac{S_x}{2} + \frac{S_x \cos 2\theta}{2}$$

$$S_n = \frac{S_z + S_x}{2} - \frac{\cos 2\theta}{2} (S_z - S_x)$$

$$S_n = \frac{S_z + S_x}{2} - \frac{S_z - S_x}{2} \cos 2\theta$$

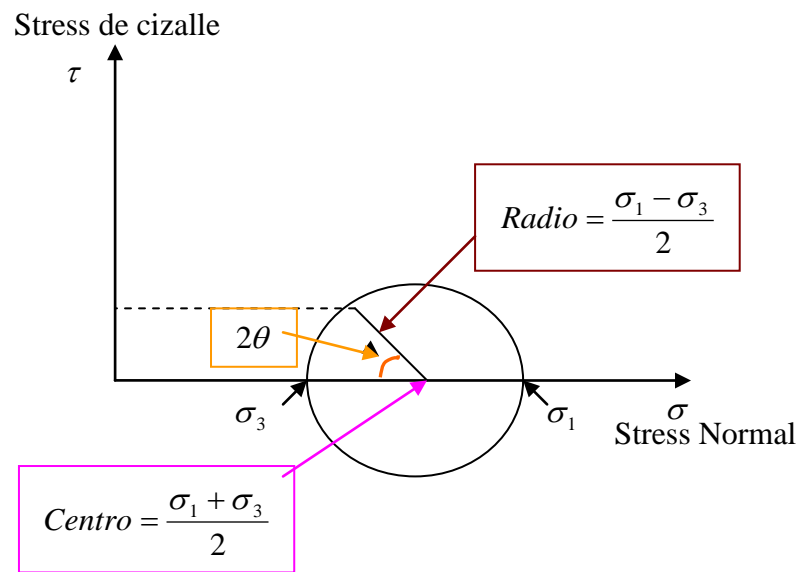
$$S_n = \frac{S_z + S_x}{2} - \frac{S_z - S_x}{2} \cos 2\theta \quad (6.12)$$

Las ecuaciones (6.11) y (6.12) son particularmente importantes, porque permitieron una solución gráfica para problemas de stress mediante una técnica desarrollada por Otto Mohr.

$$\tau = \frac{S_z - S_x}{2} \sin 2\theta \quad (6.11)$$

$$S_n = \frac{S_z + S_x}{2} - \frac{S_z - S_x}{2} \cos 2\theta \quad (6.12)$$

Mohr gráfico  $\tau$  v/s  $S_n$ .



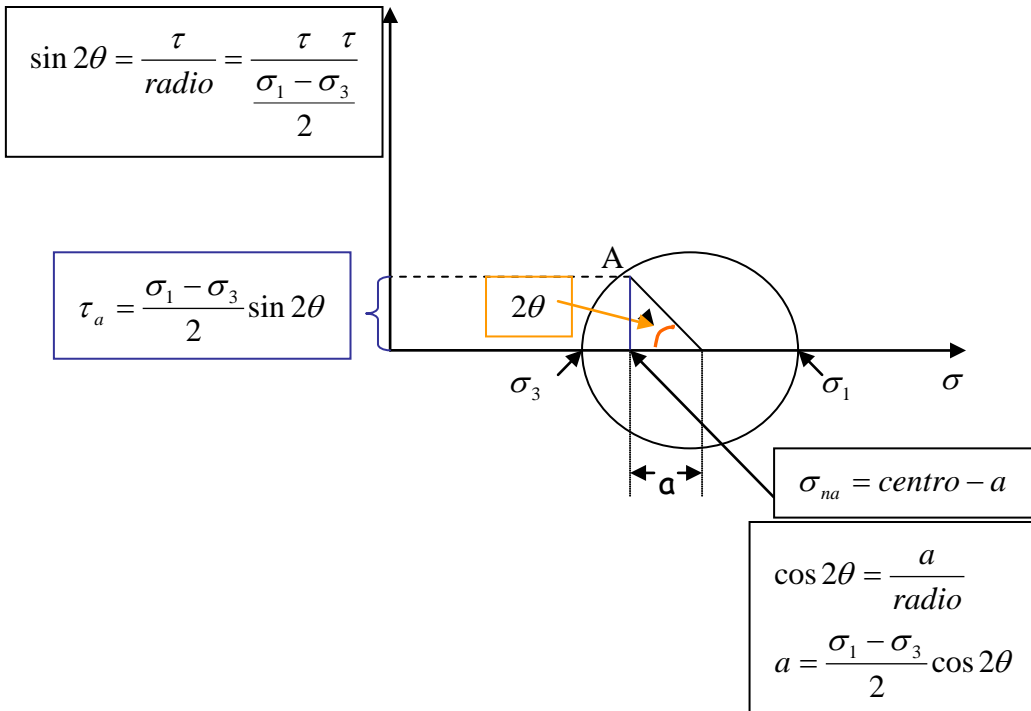
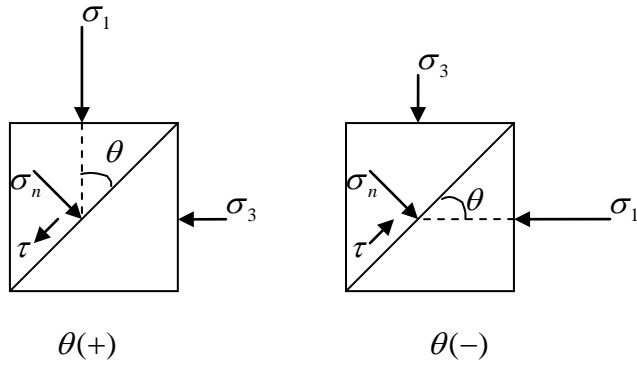
Del gráfico es posible determinar que el centro del círculo se ubica en las coordenadas  $\left(\frac{S_1 + S_3}{2}, 0\right)$  y que el radio es  $\left(\frac{S_1 - S_3}{2}\right)$ .

Como no existe  $\tau$  en los planos perpendiculares al stress principal (definición de stress principal), entonces los stresses principales se ubican en el eje horizontal:  $\tau = 0$ .

El círculo de Mohr representa entonces el estado de stress de cualquier plano dentro de un cuerpo sometido a dos stresses principales. Denominaremos  $S_1$  al stress principal máximo y  $S_3$  al stress principal mínimo.

Conociendo las magnitudes de los stresses principales, se puede determinar  $S_n$  y  $\tau$  en cualquier plano dentro del cuerpo.

Un punto en el círculo representa  $S_n$  y  $\tau$  actuando en un plano **inclinado**  $\theta$  con respecto a  $S_{\text{principal máximo}}$ .



La magnitud  $\tau_a$  está dada por el trazo  $A\sigma_{na}$  :

$$\sin 2\theta = \frac{\tau}{\text{radio}} = \frac{\tau}{\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}}$$

$$\tau_a = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\theta$$

La magnitud de  $S_{na} = \sigma_{na} = \text{centro} - a$  y

$$\cos 2\theta = \frac{a}{\text{radio}}$$

$$a = \text{radio} * \cos 2\theta = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\theta$$

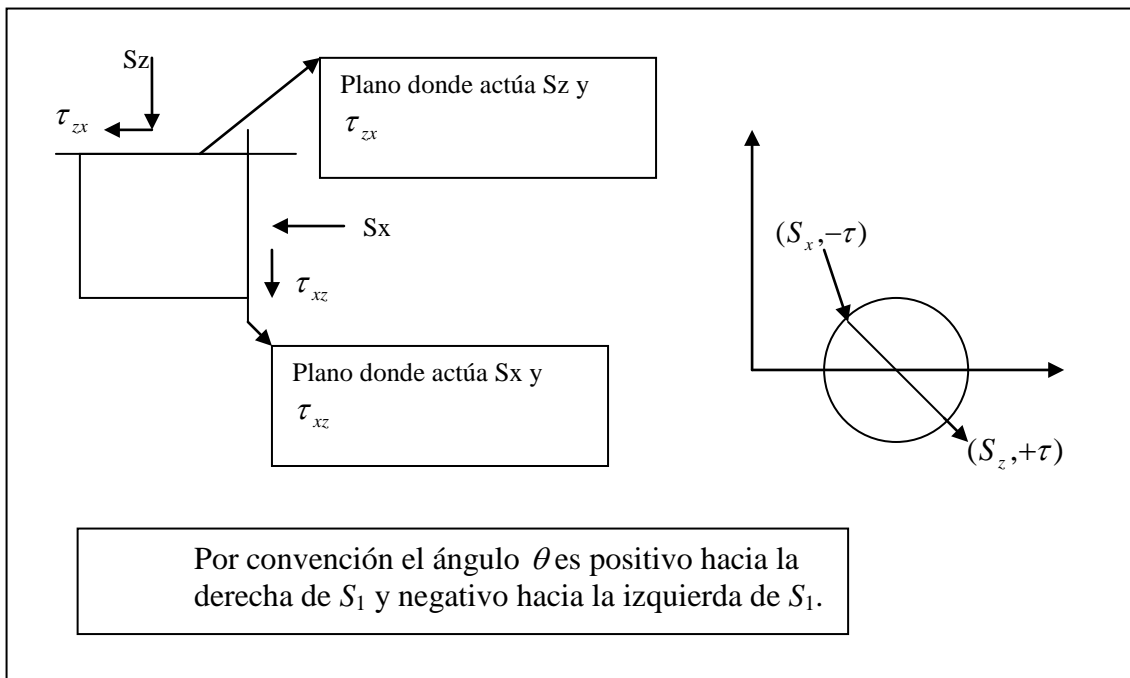
⇒

$$\sigma_{na} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\theta$$

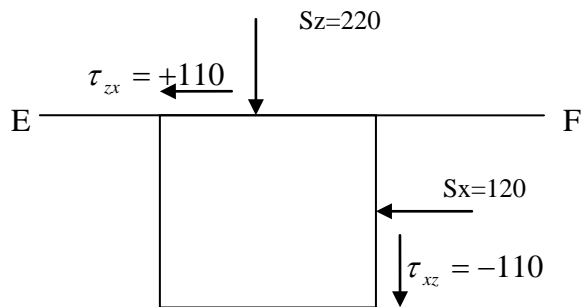
De este modo, si conocemos  $S_1$  y  $S_3$  de un sistema, podemos construir el círculo de Mohr que representa el estado de stress ( $S_n, \tau$ ) de cualquier plano.

El círculo es útil también para determinar los valores de  $S_1$  y  $S_3$ , conociendo  $S_n$  y  $\tau$  que actúan en dos superficies de orientación conocida.

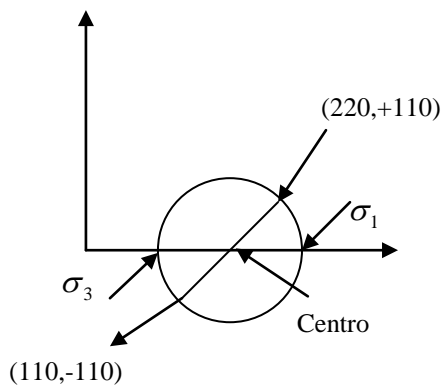
Si  $S_z, S_x$  y  $\tau$  son causados por un mismo estado de stress ( $S_1, S_3$ ) ambos puntos pertenecen al círculo. Si además  $S_z$  y  $S_x$  actúan en superficies de orientación conocida, que forman un ángulo de  $90^\circ$  entre ellas, los puntos serán diametralmente opuestos (en el círculo se representan los ángulos dobles). Por lo tanto, si se unen se encuentra el centro  $C$  y el radio del círculo; en la intersección de éste con el eje  $S$  se obtiene  $S_1$  y  $S_3$ . Se puede obtener también el ángulo  $2\theta$ , o sea el ángulo  $\theta$  entre  $S_1$  con  $S_x$  y/o con  $S_z$ .



Veamos un ejemplo: determinar  $S_1$ ,  $S_3$  y el ángulo que forma EF con  $S_1$  (orientación).



Solución Gráfica:

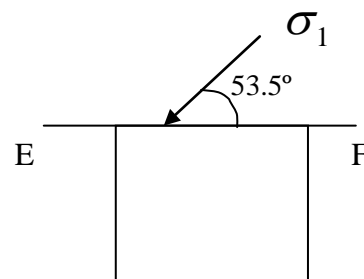


$$centro = 165$$

$$\sigma_1 = 280$$

$$\sigma_3 = 50$$

$$radio = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 115$$



$$2\theta + \alpha = 180$$

$$\sin \alpha = \frac{110}{radio} = \frac{110}{115} = 0.9565$$

$\Rightarrow$

$$\alpha = 73$$

$$2\theta = 180 - 73 = 107^\circ$$

$$\theta = 53.5^\circ$$

hacia la izquierda de  $S_1 \Rightarrow$

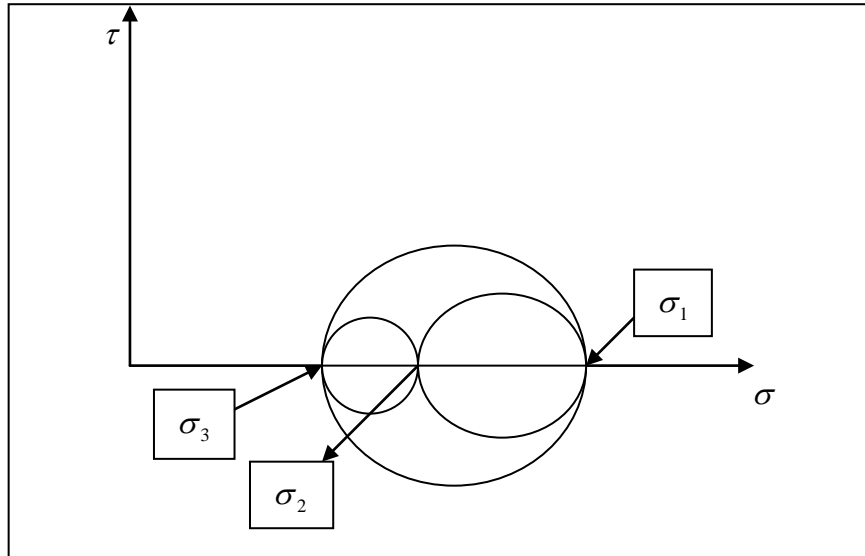
Es decir, el plano donde actúa  $S_n = 220 \text{ MPa}$  y  $\tau = 110 \text{ MPa}$ , se ubica a  $+53.5^\circ$  de  $S_1$ .



## Círculos de Mohr

Los círculos de Mohr representan el estado de stress tridimensional con

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$



El círculo mayor representa los stresses en planos perpendiculares al plano  $S_1S_3$ .

El círculo menor representa los stresses determinados por el sistema  $S_1, S_2$  y  $S_3$  en planos perpendiculares al plano  $S_2S_3$ .

De lo anterior se puede concluir que el estado de stresses mayor ocurre en planos perpendiculares al plano  $S_1S_3$  y por eso se usa el análisis el 2-D, considerando los stresses máximo y mínimo del sistema.

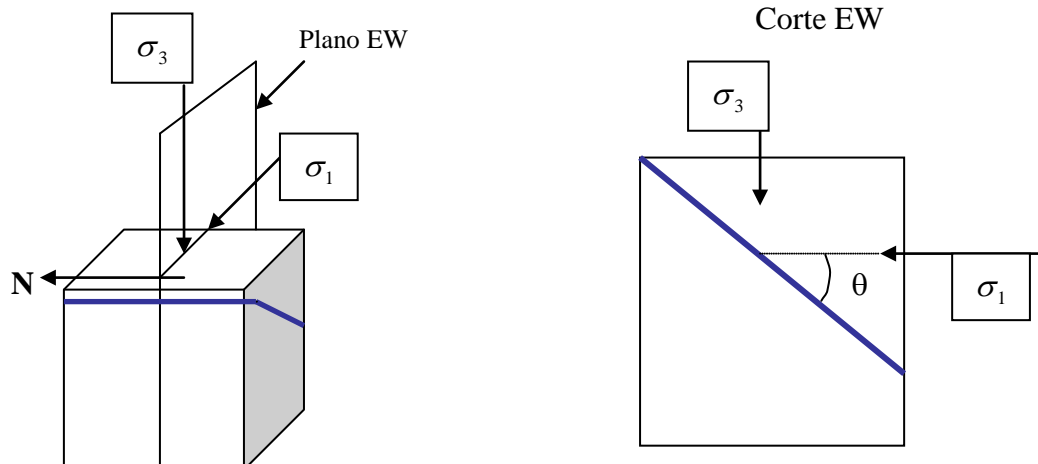
### Ejemplo:

Supongamos que el stress en un punto está caracterizado por

$$\sigma_1 \text{ dirección EW, horizontal} = 30 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 \text{ vertical} = 10 \text{ Mpa.}$$

Se pide encontrar  $S_n$  y  $\tau$  en un plano de falla de  $\rho = NS$  y  $\mu = 80^\circ E$ .



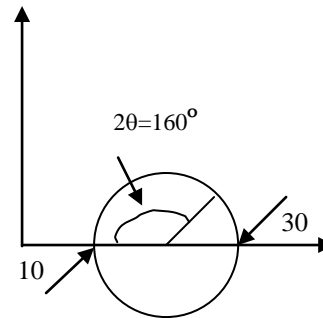
$$\theta = 80^\circ, \quad 2\theta = 160^\circ$$

$$\text{radio} = 10 \text{ MPa}$$

$$\text{centro} = c = 20 \text{ MPa}$$

$$\tau = \sin 2\theta \times \text{radio} = 3,4 \text{ MPa}$$

$$S_n = 20 \text{ MPa} + 10 \cos 20 = 29,4 \text{ MPa}.$$



### Signos en el círculo de Mohr:

1. Stress normal compresivo es positivo y plotea a la derecha del origen.
2. Stress normal extensivo (tracción) el negativo y plotea a la izquierda del origen.
3. Stress de cizalle en sentido horario es negativo y plotea bajo el eje S.
4. Stress de cizalle que actúa en sentido antihorario es positivo y plotea sobre el eje S.

Para cualquier estado de stress es evidente que la magnitud **absoluta** de los stresses de cizalle es máxima en dos planos que son perpendiculares entre sí y que se ubican a

$$+2\theta = 90^\circ \text{ de } \sigma_1 \text{ y a } -2\theta = 90^\circ \text{ de } \sigma_1.$$

La magnitud absoluta corresponde al radio del círculo y es  $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ .

## Clases de stress

El estado de stress en dos dimensiones (2-D) puede ser clasificado como:

### **Tensión hidrostática:**

Stresses en todos los planos son de tracción y de igual magnitud (existencia poco probable).

### **Tensión general:**

Los stresses principales son ambos de tracción.

### **Tensión uniaxial:**

Sólo un stress es distinto de 0 y éste es de tracción.

### **Tensión y compresión:**

Uno de los stresses es compresivo, el otro es de tracción.

### **Cizalle simple:**

Caso especial de tensión/compresión, en que  $S_1 = -S_3$ , por lo cual los planos de cizalle máximo tienen  $S = 0$  (recordar definición de cizalle simple).

### **Compresión uniaxial:**

Uno de los stresses es distinto de 0 (en particular, mayor que 0).

### **Compresión general:**

$$S_1 > S_3 > 0$$

$$S_1 > S_2 > S_3 > 0.$$

### **Compresión hidrostática:**

Stress compresivo igual en todos los planos

$$S_1 = S_2 = S_3 > 0.$$

### **Elipse de stress (elipsoide en tres dimensiones)**

En un punto  $p$  de un cuerpo rocoso hay planos  $P$  en un número infinito de orientaciones diferentes. Para cada uno de estos planos, hay dos valores de stress normal dirigidos en distinto sentido.

Si dibujamos esta familia de vectores de stress alrededor de  $p$  obtendremos una elipse de ejes  $S_1$  y  $S_3$  que coinciden con las direcciones de stress principal.

### **Trayectorias de esfuerzo**

Las variaciones tridimensionales en el estado de esfuerzos que existen en un cuerpo se aprecian más fácilmente si se considera que el sistema de los ejes principales del esfuerzo varía en orientación y en valor. Las líneas ortogonales que representan las direcciones de los esfuerzos principales se conocen como **trayectorias del esfuerzo**.

En los problemas en dos dimensiones, los dos conjuntos de líneas ortogonales que representan las direcciones de los esfuerzos máximo y mínimo, pueden representarse de una manera muy sencilla. Si la curvatura de estas líneas varía de modo que las trayectorias adyacentes se aproximen unas a otras, entonces esto indica una concentración del esfuerzo en esta región. Todos los puntos en los que los esfuerzos principales tienen valores iguales, se conocen como **puntos isótropos**.