

## Tarea 1

Miércoles 2 de Noviembre de 2011

### Pregunta 1

- Suponga que tiene un dado normal, es decir, que la probabilidad que salga un número cualquiera es  $1/6$ . Considere la secuencia  $S1=(5,4,3,6)$ , y la secuencia  $S2=(4,1,4,3)$ . Si se tiran los dados registrando los número que salen hasta que aparezca alguna secuencia, ¿cuál es la probabilidad que salga la secuencia  $S1$  antes que la  $S2$ ?
- En una fábrica de producción existen  $N$  máquinas que producen un mismo producto. Las máquinas, para no sobrecargarlas, se ha decidido que deben producir a lo más  $M$  productos diarios. Aun así, a pesar de los cuidados, una máquina puede fallar con una probabilidad  $(1 - p)$ , dejando hasta ahí su trabajo diario. Se está evaluando cambiar todas las máquinas por una máquina que se produce en China. Para ello, se incorporó dentro del sistema de producción, una máquina de prueba. Esta tiene una probabilidad de falla distinta al resto,  $(1 - q)$ .  
Además, desde que comienza la producción hasta que termina los  $M$  productos, una máquina estándar demora un tiempo que se distribuye exponencial de tasa  $\lambda$ , mientras que la máquina China es tasa  $\mu$ .
  - ¿Cuál es la probabilidad de que la máquina China termine los productos diarios?
  - Dado que  $n$  máquinas terminaron su producción, ¿cuál es la probabilidad que la máquina China haya terminado primero?
  - Dado que  $n$  máquinas cualquiera han fallado, ¿cuál es la probabilidad que la máquina China hayan terminado primero?
  - ¿Cuál es la probabilidad que  $n$  máquinas de las  $N - 1$  restantes (sin considerar la máquina China) terminen su producción diaria?
- Un jugador (J) de poker está en la final de un torneo y le queda solo un jugador por vencer. Para efectos prácticos existen tres clasificaciones de manos: Buena (B), Regular (R) y Mala (M). Para ganar se siguen las siguientes reglas para las distintas manos: M le gana a R y a M y empata con B; R le gana a M y empata con R; y M solo empata con M. El jugador J tiene un amigo que le está ayudando a vencer a su contrincante. Él sabe cuando el adversario del jugador J está mintiendo, lo que se traduce en que contrincante puede tener cualquiera de las dos otras posibles clasificaciones que el jugador J cree que tiene (cree que tiene una mano determinada con igual probabilidad para todas). Así, por ejemplo, si el jugador J sabe que su adversario tiene B y su amigo le dice que está mintiendo, entonces el oponente debe tener una mano M, tal como se detalla en la siguiente tabla:

cree que tiene	B	R	M
realmente tiene	M	M	R

El amigo le dice que está mintiendo con probabilidad  $p$ .

Sabiendo que a los dos jugadores le sale una mano con la misma probabilidad, ¿cuál es la probabilidad de que el jugador J gane un juego?

## Pregunta 2

En una bella región al sur de Tumbuctú, se ha desatado una competencia política sin precedentes. A final de este año habrá elección para elegir al futuro alcande de la región. En dicha carrera por la alcaldía participarán solos dos candidatos, Don King, actual alcande con casi 10 años en el cargo, y un nuevo político de la región llamado Ron Stein.

Debido a que su popularidad ha disminuido en el último tiempo, Don King, que desea ganar a toda costa, le ha pedido a usted asesoramiento para determinar una estrategia de campaña que le ayude a recuperar adeptos. Usted sabe que, para este tipo de casos, las estrategias posibles son solo dos: la estrategia A y la estrategia B. A su vez, Don King le informa que gracias a sus largos años en la arena política, ha podido determinar que Ron Stein lanzará una campaña con el fin de contrarrestar los efectos de su campaña con una probabilidad  $q$  (independiente de cual tipo de campaña haya lanzado King). Debido a que el actual alcande siempre le ha gustado tener la última palabra, le comenta que en caso que Stein responda a su estrategia inicial, él consideraría la opción de lanzar una segunda campaña siguiendo la estrategia C. Un estudio de las intenciones de voto de la población realizado por consultores de una prestigiosa universidad, ha determinado la probabilidad de que una persona, independiente de las demás, vote por King a final de año. Esta probabilidad dependerá, como es de esperar, de las campañas que hayan desarrollado los candidatos durante el período previo a las elecciones. Los valores obtenidos en el estudio se detallan en la siguiente tabla:

Estrategia de campaña inicial de King	Stein responde y King lanza campaña C	Stein responde y King no hace nada	Stein no responde
A	$p_1$	$p_2$	$p_3$
B	$p_4$	$p_5$	$p_6$

Tabla 1: Probabilidad de que un elector vote por King

La región donde será realizada la votación cuenta con un total de  $N$  electores inscritos en el registro. De este total, se sabe que  $N_e$  son ecologistas y están absolutamente en contra de las campañas políticas. Se sabe además, que en caso que King lance una campaña A, enfocada en el aumento de la industrialización de la zona, todos los ecologistas votarán por el otro candidato. Análogamente, si King lanza una campaña B, de postura más ambientalista, solo la mitad de los ecologistas tomará la acción de penalización antes mencionada. En este caso, los otros ecologistas se comportan como el resto de los electores.

1. Considere los siguientes valores numéricos para las probabilidades en la Tabla 1:

$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$	$p_5$	$p_6$
0.6	0.7	0.5	0.4	0.6	0.8

Considere además que la probabilidad que Stein responda la campaña inicial de King es  $q = 0.7$  y el número total de electores es  $N = 1000$  y que  $N_e = 100$  de ellos son ecologistas.

Con los datos entregados construya y resuelva un árbol de decisión que le permita a King decidir qué estrategia de campaña utilizar para maximizar el número esperado de votos que recibirá en la elección.

Observando lo preocupado que ha estado King con la futura elección, uno de sus asesores le ha comentado sobre la posibilidad de emplear un Test que agrega información sobre la reacción que presentará su adversario ante las campañas A o B que planea el candidato. Se sabe que la probabilidad que el Test prediga un contraataque de Stein dado que este candidato contraatacará, es igual a 0.8; mientras que la probabilidad que el Test prediga que no habrá reacción de Stein cuando efectivamente no la habrá es de 0.7. Además, de aplicarse el Test, la opinión pública percibirá la incertidumbre que King tiene sobre el apoyo popular, lo que se traducirá en 100 electores, ninguno de ellos ecologistas, que votarán con seguridad por Stein. También se sabe que la postura de los ecologistas no se verá afectada por el Test.

2. Plantee y resuelva un árbol de decisión que le permita a nuestro candidato evaluar si el Test que le propone el asesor es conveniente o no.

3. Para la situación de la parte 1. encuentre una expresión que le permita determinar cuántos votos espera recibir King en la votación, tomando como parámetros los datos que Ud. estime convenientes. Denote este valor por  $V(x_1, x_2, \dots, x_k)$ , donde  $x_1, x_2, \dots, x_k$  son  $k$  parámetros utilizados (por ejemplo, si ocupa solo dos parámetros la expresión será  $V(x_1, x_2)$ ="función de  $x_1$  y  $x_2$ ).

### Pregunta 3

Una empresa produce un solo producto. Para la producción de una unidad de producto se necesita una unidad de un único insumo. Considere que los productos producidos en una semana, ya están disponibles para la venta durante esa semana. De manera análoga, considere que la materia prima pedida al inicio de una semana está disponible para ser utilizada esa semana.

La empresa cuenta con una cartera compuesta por  $C$  clientes. Cada uno de estos clientes, independiente de los otros y de lo que haya hecho anteriormente, deseará adquirir una unidad del producto fabricado por la empresa en la semana  $k$  con probabilidad  $p_k$ . Los clientes nunca solicitan más de una unidad por semana. Si un cliente solicita el producto y no hay, la venta se pierde.

Los costos que incurre la empresa son los siguientes:

- costo fijo por poner una orden de materia prima  $Z_i$
- costo unitario, por unidad solicitada de materia prima,  $M_i$
- costo unitario por mantener una unidad de materia prima en inventario,  $N_i$
- costo fijo por producir durante la semana  $k$ ,  $F_{ki}$
- costo unitario de producir durante la semana  $k$ ,  $U_{ki}$
- costo unitario por mantener una unidad de producto en inventario,  $I_i$

El precio unitario de venta del producto es  $B$  y está fijo para todo el horizonte de planificación. Las unidades de materia prima sobrantes, al final del horizonte de planificación, podrán ser vendidas a un distribuidor a un valor  $S$  por unidad ( $S < M$ ). Por otro lado, los productos sobrantes serán liquidados a un precio unitario  $R$  ( $R < B$ ).

Al inicio del período de planificación se cuenta con  $Q$  unidades de producto en inventario y  $L$  unidades de materia prima para la producción.

Construya un modelo de programación dinámica estocástica que permita planificar la producción y adquisición de materia prima, maximizando el beneficio neto esperado de la empresa.