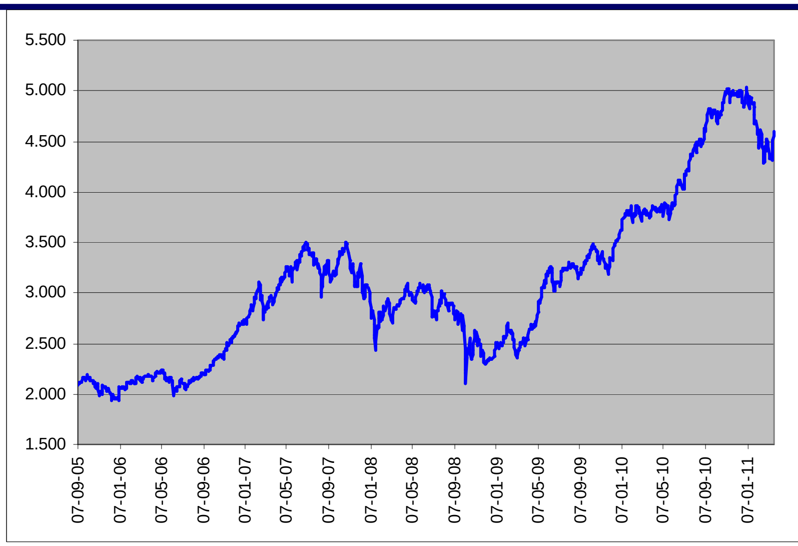
INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Series de Tiempo

2011 J. Miguel Cruz

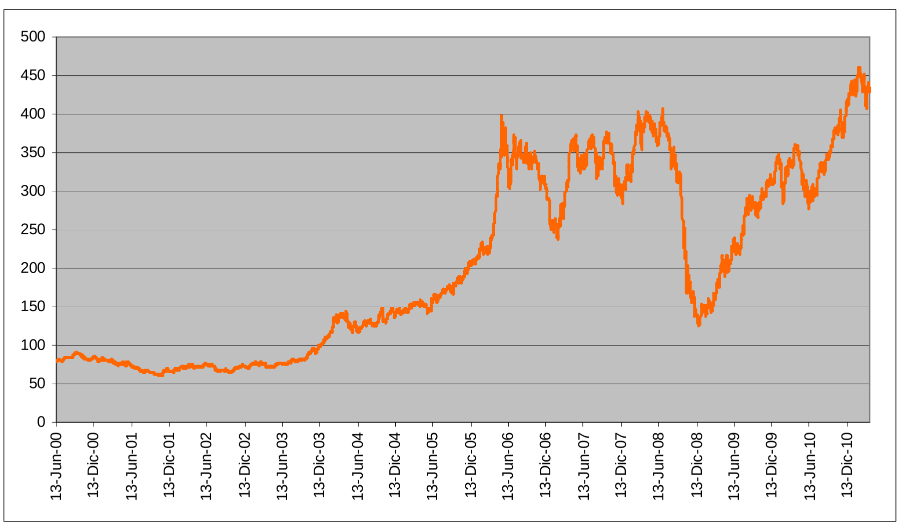
Historia reciente del IPSA



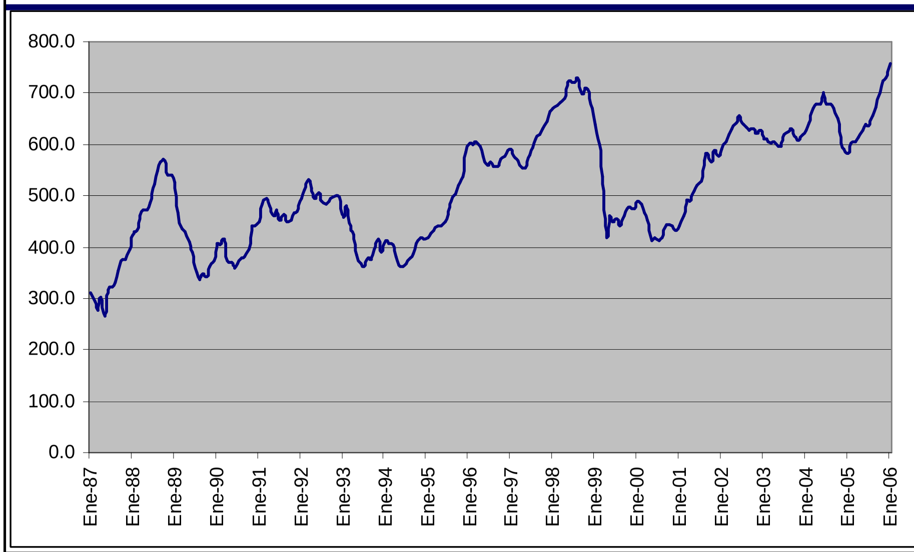
Diez años de historia del dólar

(Dólar Observado)

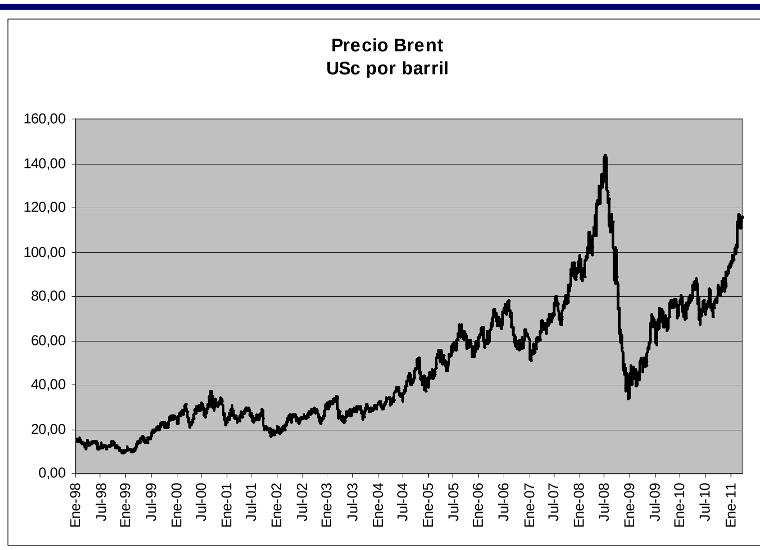
Precio del Cobre



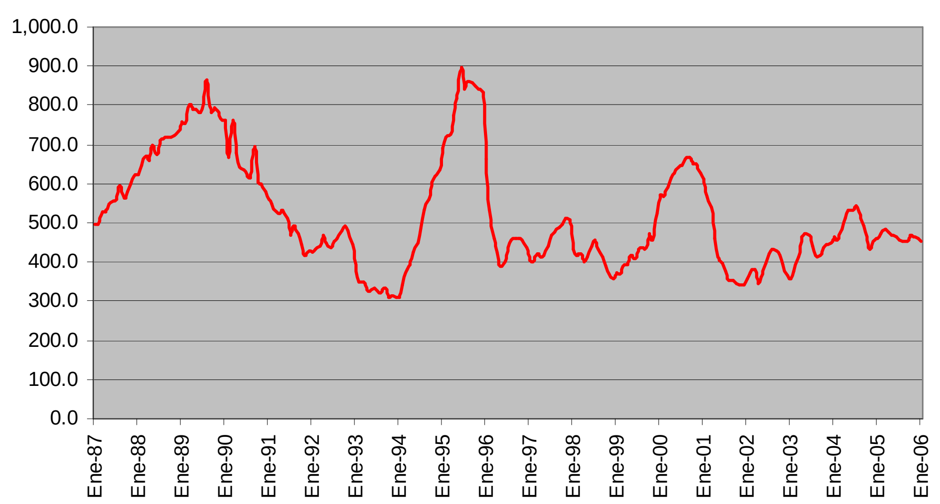
Precio Harina de Pescado



Precio del Petróleo



Precio de la Celulosa



INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE
J. Miguel Cruz
2011

Series de Tiempo

- Variables $\{y_t\}$
- Observamos $\{y_1 \ldots y_T\}$
- Por ejemplo, $y_t = \varepsilon_t + \mu$,
- O bien, $y_t = \beta t + \varepsilon_t$
- Media o varianza pueden ser función del tiempo
- $f_{Y_t}(y_t)$ función de densidad incondicional

INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE
J. Miguel Cruz
2011

Necesidad de simplificar

- $E(y_1)\ldots E(y_T)$ medias
- $V(y_1)\ldots V(y_T)$ varianzas
- Y $T(T-1)/2$ covarianzas $\sigma_{ij}=Cov(y_i,y_j)$
- Tenemos una sola realización para inferir parámetros de una distribución conjunta (procesos ergódicos)

Procesos estacionarios

- Proceso se encuentra en algún estado de equilibrio estático
- Proceso es estacionario de manera estricta si sus propiedades no cambian al modificar la fecha de origen
- Es decir la distribución de probabilidad conjunta para un conjunto de fechas t_1, t_2, …t_m es la misma que la distribución para las fechas t_1+k, t_2+k, …t_m+k, con k desplazamiento arbitrario.

Implicancias de procesos estacionarios

- $E(y_1)=E(y_2)=E(y_T)= E(y_t)=\mu$
- $V(y_1)=V(y_2)=V(y_T)= V(y_t)=\sigma^2$
- $Cov(y_1,y_{1+k})=Cov(y_2,y_{2+k})=Cov(y_{T-k},y_T)= Cov(y_t,y_{t-k})$
- Podemos definir la autocovarianza γ_k y la autocorrelación ρ_k como

$$\gamma_k = Cov(y_t, y_{t-k}) = E\left[(y_t - \mu)(y_{t-k} - \mu)\right]$$

$$\rho_k = \frac{Cov(y_t, y_{t-k})}{\sqrt{V(y_t)\cdot V(y_{t-k})}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

Propiedad Básica: Descomposición de Wold

- Cualquier serie estacionaria sin tendencia puede escribirse como una combinación lineal de variables aleatorias independientes
- Es decir,

$$y_t - \mu = a_t + \psi_1 \cdot a_{t-1} + \psi_2 \cdot a_{t-2} + \ldots = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \cdot a_{t-j}$$

- Con $E(a_t)=0$, $V(a_t)=\sigma^2$, y $E(a_t,a_{t-k})=0$, para todo $k\neq 0$

Se puede mostrar que

$$\gamma_0 = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2$$

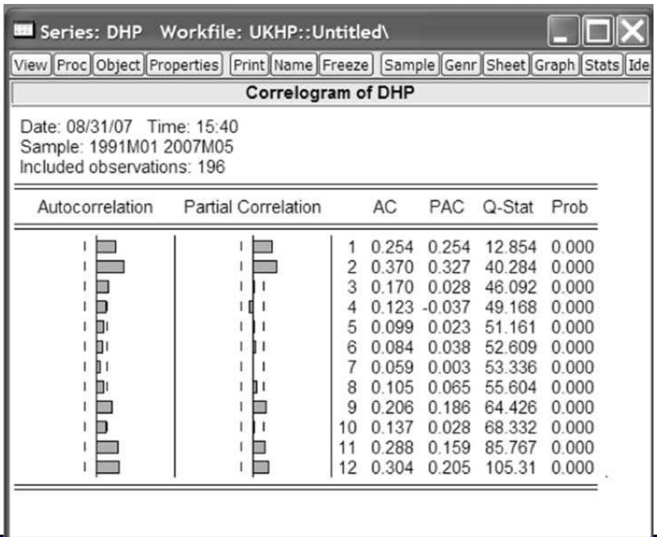
$$\gamma_k = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \cdot \psi_{j+k}$$

$$\rho_k = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \cdot \psi_{j+k}}{\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2}$$

Test de las ACF

- **Se propone que ρ1=ρ2=…=ρm=0**
- **Estadístico de Ljung & Box Q(m) chi-cuadrado de m grados de libertad (a veces m=Ln(T))**
- **Si algún Q(m) es suficientemente grande, se rechaza la hipótesis**

Ejemplo de Output de Computador



Correlogram of DHP

Date: 08/31/07 Time: 15:40
Sample: 1991M01 2007M05
Included observations: 196

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.254	0.254	12.854	0.000
		2	0.370	0.327	40.284	0.000
		3	0.170	0.028	46.092	0.000
		4	0.123	-0.037	49.168	0.000
		5	0.099	0.023	51.161	0.000
		6	0.084	0.038	52.609	0.000
		7	0.059	0.003	53.336	0.000
		8	0.105	0.065	55.604	0.000
		9	0.206	0.186	64.426	0.000
		10	0.137	0.028	68.332	0.000
		11	0.288	0.159	85.767	0.000
		12	0.304	0.205	105.31	0.000

Un caso particular: AR(1)

- **Supongamos que μ=0 y que**

$$y_t = \phi \cdot y_{t-1} + a_t$$

- **Usando el operador L (Lag)**

$$Ly_t \equiv y_{t-1}$$

- **AR(1) se escribe,**

$$(1-\phi L)y_t = a_t$$

AR(1) se puede escribir como un MA(∞)

- **Una forma de verlo es que**

$$y_t = (1-\phi L)^{-1} a_t = (1+\phi L + \phi^2 L^2 + \cdots) a_t$$
$$= a_t + \phi a_{t-1} + \phi^2 a_{t-2} + \cdots \quad \text{con } |\phi| < 1$$

- **Esto nos sirve para encontrar la autocovarianza γ_k y la autocorrelación ρ_k**

$$\gamma_k = \phi \cdot \gamma_{k-1} \qquad k > 0$$

$$\rho_k = \phi^k$$

AR(2)

- **Caso general**

$$y_t = \phi_0 + \phi_1 \cdot y_{t-1} + \phi_2 \cdot y_{t-2} + a_t$$

- **Media incondicional**

$$E(y_t) = \mu = \frac{\phi_0}{1-\phi_1-\phi_2}$$

- **Se puede reescribir como:**

$$y_t - \mu = \phi_1 \cdot (y_{t-1} - \mu) + \phi_2 \cdot (y_{t-2} - \mu) + a_t$$

ACF de AR(2)

- Multiplicando por (y_{t-k}-μ) y como E[(y_{t-k}-μ)a_t]=0 para k>0, entonces

$$\gamma_k = \phi_1 \cdot \gamma_{k-1} + \phi_2 \cdot \gamma_{k-2} \qquad k > 0$$

- Dividiendo por γ_0, entonces

$$\rho_k = \phi_1 \cdot \rho_{k-1} + \phi_2 \cdot \rho_{k-2} \qquad k > 0$$

- Solución de esta ecuación es

$$\rho_0 = 1$$
$$\rho_1 = \frac{\phi_1}{1-\phi_2}$$
$$\rho_k = \phi_1 \cdot \rho_{k-1} + \phi_2 \cdot \rho_{k-2} \qquad k \geq 2$$

Polinomio Característico

- Proceso en ρ se puede escribir como

$$(1-\phi_1 \cdot L - \phi_2 \cdot L^2)\rho_k = 0$$

- Polinomio asociado

$$1-\phi_1 \cdot x - \phi_2 \cdot x^2 = 0$$

- Soluciones

$$x = \frac{\phi_1 \pm \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{-2\phi_2} = w_{1,2}$$

AR(2) y ciclos

- **Si w1 y w2 son las raíces reales del polinomio, entonces**

$$(1-\phi_1 \cdot L - \phi_2 \cdot L^2) = (1-w_1 L)(1-w_2 L)$$

- **Si** $\phi_1^2 + 4\phi_2 < 0$ **entonces ACF es una combinación de senos y cosenos, con raíces complejas a+-bi y con ciclos de largo promedio k:**

$$k = \frac{2\pi}{\cos^{-1}(a/\sqrt{a^2+b^2})}$$

AR(p)

- **AR(p):**

$$y_t = \phi_0 + \phi_1 \cdot y_{t-1} + \phi_2 \cdot y_{t-2} + \ldots + \phi_p \cdot y_{t-p} + a_t$$

- **Media**

$$E(y_t) = \mu = \frac{\phi_0}{1-\phi_1-\phi_2-\ldots-\phi_p}$$

- **ACF**

$$(1-\phi_1 \cdot L - \phi_2 \cdot L^2 - \ldots - \phi_p \cdot L^p)\rho_k = 0 \quad k > 0$$

Cómo reconocer un modelo AR?

- **PACF: Se estiman las siguientes regresiones lineales**

$$y_t = \phi_{0,1} + \phi_{1,1} \cdot y_{t-1} + e_{1,t}$$
$$y_t = \phi_{0,2} + \phi_{1,2} \cdot y_{t-1} + \phi_{2,2} \cdot y_{t-2} + e_{2,t}$$
$$y_t = \phi_{0,3} + \phi_{1,3} \cdot y_{t-1} + \phi_{3,2} \cdot y_{t-2} + \phi_{3,3} \cdot y_{t-3} + e_{3,t}$$
$$\vdots$$

- **Φ_{22} es la contribución marginal de y_{t-2} a y_t. Luego para un modelo AR(p), los términos Φ_{jj} deben ser cercanos a cero para j>p.**

PACF Muestrales

- **Φ_{pp} converge a Φ_p cuando T tiende a infinito**
- **Φ_{ll} converge a 0 para l>p**
- **La varianza asimptotica de Φ_{ll} es 1/T para l>p**
- **$\pm 2/\sqrt{T}$ corresponde a 2 desviaciones estándares**
- **Akaike Information Criterion AIC(k)…se escoge el k que tenga mínimo AIC**

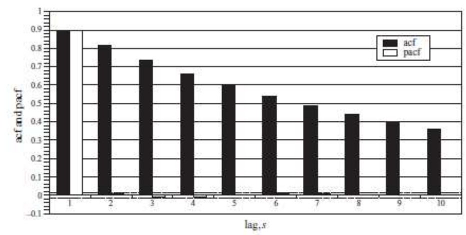


Figure 5.4 Sample autocorrelation and partial autocorrelation functions for a slowly decaying AR(1) model: $y_t = 0.9y_{t-1} + u_t$

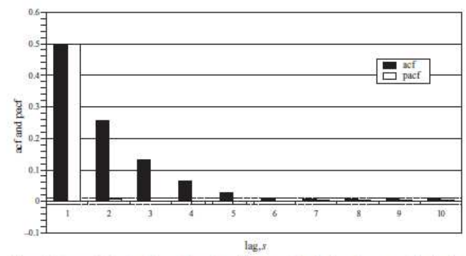


Figure 5.5 Sample autocorrelation and partial autocorrelation functions for a more rapidly decaying AR(1) model: $y_t = 0.5y_{t-1} + u_t$

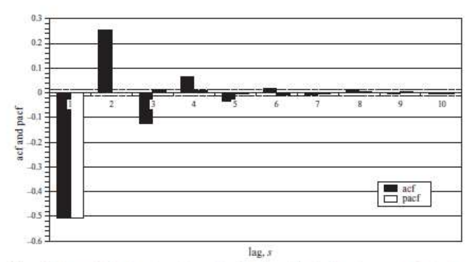


Figure 5.6 Sample autocorrelation and partial autocorrelation functions for a more rapidly decaying AR(1) model with negative coefficient: $y_t = -0.5y_{t-1} + u_t$

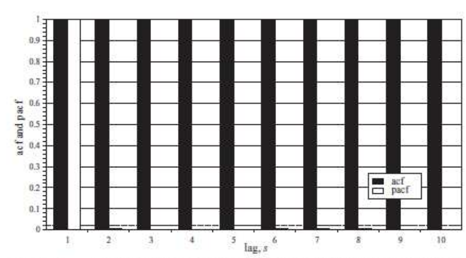


Figure 5.7 Sample autocorrelation and partial autocorrelation functions for a non-stationary model (i.e. a unit coefficient): $y_t = y_{t-1} + u_t$

Generalización

- AR(p)

$$\phi(L)y_t = a_t$$

$$(1-\phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots \phi_p L^p)y_t = a_t$$

- Estacionario si $(1-g_1 L)\cdot(1-g_2 L)\cdots(1-g_p L)=0$
- Son tales que $|g_i| < 1$
- Lo que se puede representar $y_t = \psi(L)a_t$
- Donde los coeficientes se deducen de

$$\phi(L)\cdot\psi(L) = 1$$

Proceso MA(1)

- Procesos basado sólo en innovaciones aleatorias

$$y_t = a_t + \theta \cdot a_{t-1}$$

$$y_t = (1-\theta L)a_t$$

- Podemos encontrar la autocovarianza γ_k y la autocorrelación ρ_k ?

Estimación de procesos MA

- Estimar el orden q MA(q), por estudio de las ACF
- Máxima verosimilitud

Combinaciones ARMA(p,q)

- Ejemplo ARMA(1,1)

$$y_t - \phi \cdot y_{t-1} = a_t + \theta \cdot a_{t-1}$$

- Representación MA?

- Representación AR?

Estimaciones ARMA(1,1)

- **Cómo estimamos?**
  - ACF de un ARMA(1,1) se comporta como AR(1), pero a partir del rezago 2.
  - PACF de un ARMA(1,1) se comporta como un MA(1), pero a partir del rezago 2
- **ACF y PACF no son tan útiles**
- **Se requiere EACF (Extended Autocorrelation Function)**

EACF

- **X valor absoluto de EACF ≥ 2/√T**
- **0 valor absoluto de EACF < 2/√T**
- *** X o 0.**

q

p

AR \ MA	0	1	2	3	4	5
0	X	X	X	X	X	X
1	X	0	0	0	0	0
2	*	X	0	0	0	0
3	*	*	X	0	0	0
4	*	*	*	X	0	0
5	*	*	*	*	X	0

Estimación de procesos de tasas de Interés

Modelo de Vasicek

$$r_{t+\Delta t} = r_t + a\cdot(b - r_t)\cdot\Delta t + \sigma\cdot\sqrt{\Delta t}\cdot N(0,1)$$

$$r_{t+1} = r_t + a\cdot(b - r_t) + \varepsilon_t$$

Qué tipo de proceso es?

Procesos no estacionarios

- **No estacionario en varianza**
- **Hay que buscar una transformación tal que “estabilice” la varianza**
- **No estacionario en media…puede ser un proceso explosivo**

Procesos no estacionarios:

- Procesos de raíces unitarias
- Ejemplo: $y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t$
- $\Rightarrow y_t - y_{t-1} = \beta_1 + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$
- Qué proceso es este?
- Si definimos $w_t = y_t - y_{t-1} \Rightarrow (1-L)y_t = \Delta y_t$
- Entonces w_t es ahora qué proceso?

Caminos aleatorios

- Supongamos $\mu = 0$ a_t WN

$$y_t = \phi \cdot y_{t-1} + a_t$$

- Y además $\phi = 1$

$$y_t = y_{t-1} + a_t$$

Camino aleatorio

$$y_t = y_{t-1} + \mu + a_t$$

Camino aleatorio con drift (driza)

Propiedades del camino aleatorio

- **Podemos recursivamente deducir que,**

$$y_t = y_0 + t \cdot \mu + \sum_{i=0}^{t-1} a_{t-i}$$

- **Por lo que $E_0(y_t)$, $\gamma_{0,t}=V_0(y_t)$ y $\gamma_{k,t}= Cov(y_t, y_{t-k})$ se pueden ahora calcular. Verdad?**

- **RW (CA) es un proceso integrado, es decir la primera diferencia lleva a un proceso estacionario** $\Delta y_t = \mu + a_t$

Test de Raíces Unitarias

- **Dickey Fuller Test (Test t de Φ_1-1)**
- **Alternativamente, DF Aumentado:**
- **Para AR(p), Se corre regresión**

$$y_t = c_t + \beta \cdot y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \phi_i \Delta y_{t-i} + e_t$$

- **Con c_t una función determinística de t (por ejemplo, 0, constante, o bien $w_0 + w_1 \cdot t$) y**

$$\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$$

- **Se testea si β es significativamente distinto de 1**

ARIMA(p,d,q)

- **Podría darse que el proceso sea necesario diferenciarlo d veces para llegar a un proceso estacionario,**
- **… que pude a su vez ser un proceso ARMA(p,q)**
- **Esto se escribe:**

$$\phi(L)\Delta^d y_t = \theta_0 + \theta(L)a_t$$

- **Generalmente d=0,1, o bien a lo más 2.**