INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Medición Riesgo de Mercado

Introducción al VaR

2011 J. Miguel Cruz

Agenda

- Introducción
- Factores de riesgos y sus procesos
- Modelos de Precios
- Volatilidades
- Correlaciones
- Ejercicios de Volatilidades y Correlaciones

INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

J. Miguel Cruz
2011

1. Riesgos en la industria financiera

Riesgo:

Cuánto se espera perder como consecuencia de:

1 Cambios en precios: **Mercado**

2 No cumplimiento obligaciones contractuales: **Crédito**

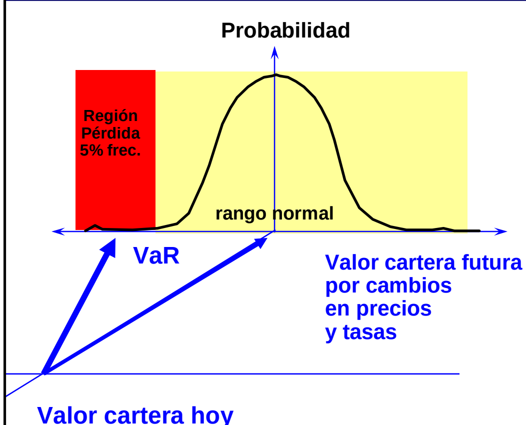
3 Ejecución errada: **Operacional**

Preguntas:

En qué período de tiempo ?

Con qué probabilidad?

Riesgo de mercado

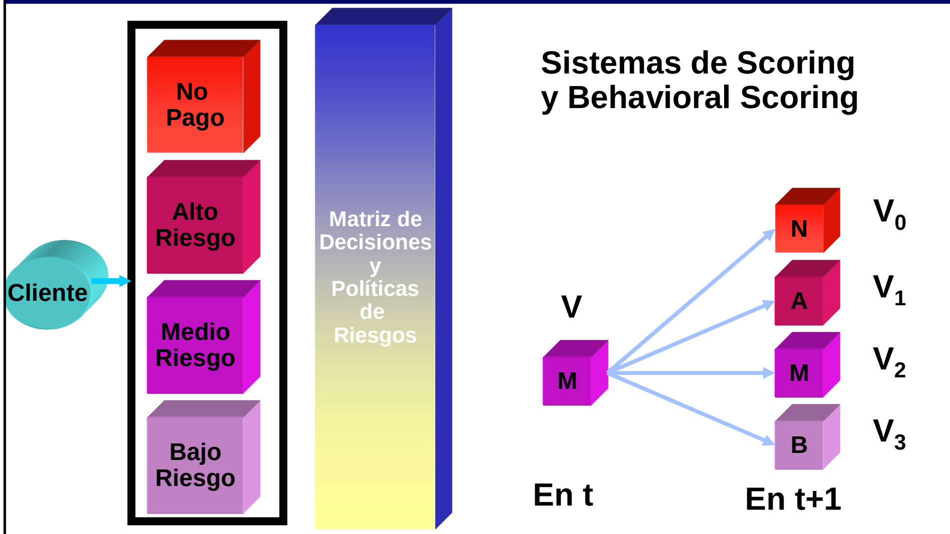


Value at Risk, VAR:

- Pérdida máxima que se puede incurrir con un determinado grado de confianza, en un determinado intervalo de tiempo

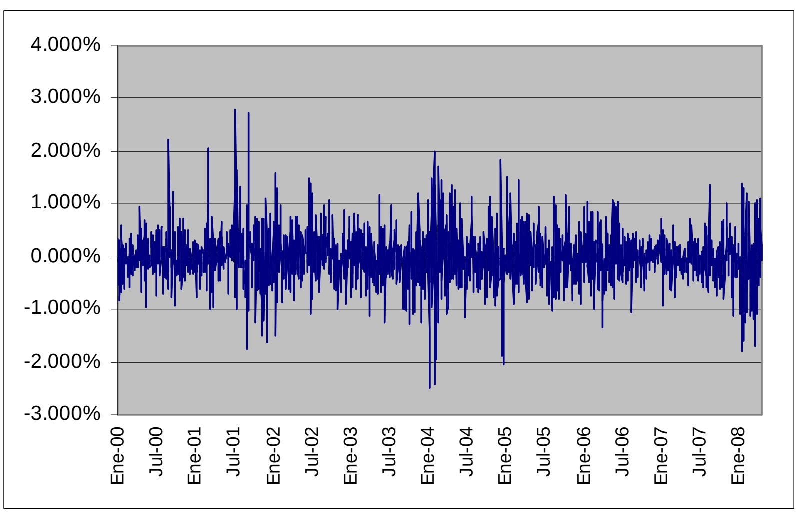
- Ejemplo: Con un 95% de confianza podemos afirmar que no se perderá más de un 3% de la cartera (1,5 MM US$) en un día.

Sistema de riesgo crediticio tradicional

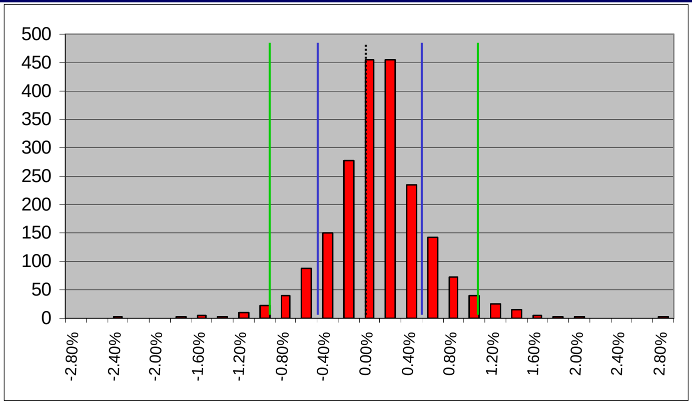


Tipo de Cambio

(Cambios diarios en el dólar observado)



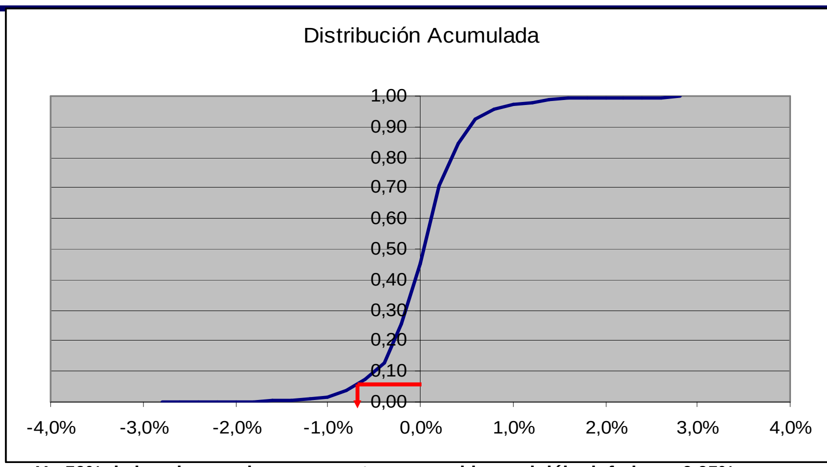
Histograma para los cambios porcentuales diarios del dólar



- El histograma clasifica los datos de acuerdo al número de observaciones cuyos valores se encuentran en un determinado intervalo.
- Valor medio: -0,053%
- Desviación estándar o Volatilidad*: 0,48%

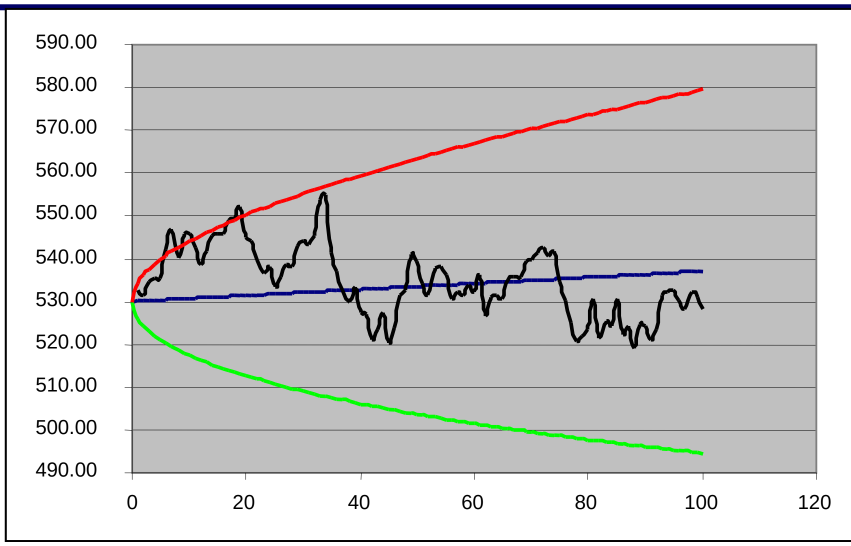
* Se define volatilidad como la desviación estándar de los retornos porcentuales de una serie

Calculando la frecuencia acumulada



- Un 50% de las observaciones presentan un cambio en el dólar inferior a -0,05%
- Un 5% de las observaciones presentan un cambio de -0,8% o menos
- El punto de corte para que un 95% de las observaciones sean mayores que dicho valor: -0,8%

Ejemplo: Tipo de Cambio



Ejemplo: Introducción al VaR

- **Supongamos el siguiente portfolio:**

Riesgo	**Exposición (UF)**
Tasa interés Corto Plazo $	106.500
Tasa interés Largo Plazo US$	295.000
Tasa interés Corto Plazo US$	205.000
Dólar	95.200
Totales	**701.700**

¿Cuál de estas posiciones presenta mayor riesgo?

Sensibilidad

Supongamos que mi portfolio presenta las siguientes sensibilidades:

Riesgo	Exposición (UF)	Sensibilidad	Sens. (UF)
Tasa interés Corto Plazo $	106.500	0,29	30,9
Tasa interés Largo Plazo	295.000	0,71	209,5
Tasa interés CP US$	205.000	0,18	36,9
Dólar	95.200	1,00	95,2
Totales	**701.700**		

¿Cuál de estas posiciones representa mayor riesgo?

Introducción de un nuevo concepto: el VaR

Supongamos que las volatilidades son tales que:

Riesgo	Exposición (UF)	Sensibilidad	Sens. (UF)	Volatilidad
Tasa interés Corto Plazo $	106.500	0,29	30,9	0,145%
Tasa interés Largo Plazo US$	295.000	0,71	209,5	0,278%
Tasa interés Corto Plazo US$	205.000	0,18	36,9	0,101%
Dólar	95.200	1,00	95,2	1,578%
Totales	**701.700**			

¿Cuál de estas posiciones representa mayor riesgo?

Riesgo total se diversifica

Si calculamos pérdidas potenciales, ¿qué posición es más riesgosa?

Riesgo	Exposición (UF)	Sensibilidad	Sens. (UF)	Volatilidad	Pérdida Pot
Tasa interés Corto Plazo $	106.500	0,29	308,9	0,145%	89,6
Tasa interés Largo Plazo US$	295.000	0,71	2094,5	0,278%	1.164,5
Tasa interés Corto Plazo US$	205.000	0,18	369,0	0,101%	74,5
Dólar	95.200	1,00	952,0	1,578%	3.004,5
Totales	**701.700**				**4.333,16**

¿Cuánto es el riesgo total?

a) UF 701.700
b) UF 4.333,16
c) Menos de UF 4.333,16
d) Más de UF 4.333,16

INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

J. Miguel Cruz
2011

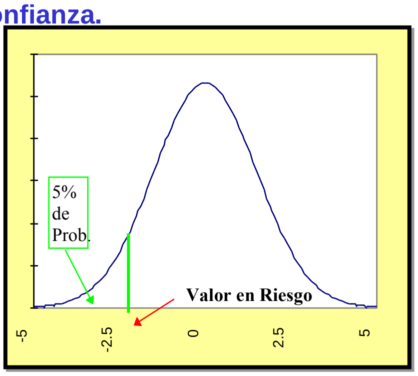
Recordando la definición del VaR

- **Definición de Value at Risk:**
  Máxima pérdida esperada dado un horizonte de tiempo y un intervalo de confianza.

$$P = \text{Prob}\{\ \Delta V \geq \text{VaR}\}$$

Distribución del cambio en el valor de un instrumento en un día

(Volatilidad 1.5% diaria)



INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

J. Miguel Cruz
2011

Definición de VaR (Cont.)

Para calcular VaR necesitamos la distribución de probabilidad de ΔV: si *f* es la función de densidad, entonces:

$$P = \text{Prob}\{\,\Delta \text{V} \geq \text{VaR}\}$$

$$\int_{-\infty}^{VaR} f(x)dx = 1 - P$$

Sin embargo, podemos obtener VaR en forma directa si conocemos la función de distribución acumulada *F* de ΔV:

$$F(VaR) = 1 - P$$

Y esto se simplifica a encontrar la inversa de la distribución acumulada:

$$VaR = F^{-1}(1-P)$$

INGENIERIA INDUSTRIAL UNIVERSIDAD DE CHILE

J. Miguel Cruz 2011

Buscando la distribución Normal

El valor de la cartera puede descomponerse en **n** factores de riesgo

$$\tilde{V} = V(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \cdots, \tilde{f}_n)$$

El cambio en V puede representarse como:

$$\Delta V = \frac{\partial V}{\partial f_1}\Delta f_1 + \frac{\partial V}{\partial f_2}\Delta f_2 + \cdots + \frac{\partial V}{\partial f_n}\Delta f_n + O(\Delta f^2)$$

Donde

$$O(\Delta f^2) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial f_1^2}\Delta f_1^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial f_2^2}\Delta f_2^2 + \cdots + \frac{\partial^2 V}{\partial f_n^2}\Delta f_n^2\right) + \cdots + \approx 0$$

INGENIERIA INDUSTRIAL UNIVERSIDAD DE CHILE

J. Miguel Cruz 2011

El supuesto de linealidad es importante

- Suponemos que sólo importan los efectos de primer orden
- No incorpora convexidad
- No captura comportamiento de derivados no lineales
  - Opciones

INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

J. Miguel Cruz
2011

Usando Taylor, y reconociendo cambios porcentuales de factores

Luego ΔV se escribe como:

$$\Delta V \approx \frac{\partial V}{\partial f_1}\Delta f_1 + \frac{\partial V}{\partial f_2}\Delta f_2 + \cdots + \frac{\partial V}{\partial f_n}\Delta f_n$$

Esto a su vez puede re escribirse como:

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{S_1 \cdot f_1}{V} \cdot \left(\frac{\Delta f_1}{f_1}\right) + \cdots + \frac{S_n \cdot f_n}{V} \cdot \left(\frac{\Delta f_n}{f_n}\right)$$

O bien simplificamos

$$\frac{\Delta V}{V} \approx w_1 \cdot \tilde{x}_1 + \cdots + w_n \cdot \tilde{x}_n$$

INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

J. Miguel Cruz
2011

Luego podemos encontrar una distribución normal multivariada...

- Concluimos que, la ecuación

$$P = \text{Prob}\{\, \Delta \text{V} \geq \text{VaR} \}$$

es aproximadamente equivalente a (si V>0):

$$\Pr\{V \cdot (w_1 \cdot \tilde{x}_1 + w_2 \cdot \tilde{x}_2 + \cdots + w_n \cdot \tilde{x}_n) \geq VaR\}$$

Es decir:

$$\Pr\{\tilde{z} \geq \frac{VaR}{V}\}$$

con:

$$\tilde{z} = (w_1 \cdot \tilde{x}_1 + w_2 \cdot \tilde{x}_2 + \cdots + w_n \cdot \tilde{x}_n)$$

INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

J. Miguel Cruz
2011

Definición de VaR (Cont.)

Si los factores de riesgos corresponden a procesos Normales multivariados

$$\tilde{x}_i \rightarrow N(\mu_i, \sigma_i^2)$$

$$Cov(\tilde{x}_i, \tilde{x}_j) = \rho_{ij} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j = \sigma_{ij}$$

Entonces el cambio en el valor se distribuye como una normal

$$\frac{\Delta V}{V} \equiv \tilde{z} = w_1 \cdot \tilde{x}_1 + \cdots + w_n \cdot \tilde{x}_n \rightarrow N(\mu_z, \sigma_z^2)$$

Donde los parámetros de la distribución son

$$\mu_z = \mathbf{w}' \cdot \boldsymbol{\mu}$$

$$[\Sigma]_{ij} = \sigma_i \cdot \sigma_j \cdot \rho_{ij}$$

$$\sigma_z^2 = \mathbf{w}' \cdot \Sigma \cdot \mathbf{w}$$

INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

J. Miguel Cruz
2011

Definición de VaR (Cont.)

La definición de VaR puede escribirse entonces como

$$P = \text{Prob}(\Delta V \geq VaR) \Leftrightarrow P = \Pr\text{ob}(\frac{\Delta V}{V} \geq \frac{VaR}{V})si\ V\rangle 0$$

Entonces, si la distribución es normal

$$\frac{VaR}{V} = \mu_z - k_P \cdot \sigma_z$$

$$k_P = N^{-1}(1-P)$$

Donde los parámetros de la distribución se refieren al cambio porcentual medio (o esperado) del cambio porcentual de la cartera, y a la desviación estándar del cambio porcentual de la cartera

INGENIERIA INDUSTRIAL UNIVERSIDAD DE CHILE

J. Miguel Cruz 2011

VaR Individual

- **Para un factor de riesgo individual podemos evaluar el VaR sobre la cartera**

$$\frac{VaR_i}{V} = w_i \cdot \left(\mu_i - k_P \cdot \sigma_i\right)$$

- **O bien,**

$$VaR_i = S_i \cdot f_i \cdot \left(\mu_i - k_P \cdot \sigma_i\right)$$

- **Lo que equivale a**

$$VaR_i = V \cdot e_i \cdot \left(\mu_i - k_P \cdot \sigma_i\right)$$

- **Donde e_i es la elasticidad de V al factor i**

INGENIERIA INDUSTRIAL UNIVERSIDAD DE CHILE

J. Miguel Cruz 2011

VaR Individual vs. VaR Total

- Como el VaR total de una cartera se puede escribir como,

$$VaR_T = V(\mu_{\Delta V/V} - k_P \cdot \sigma_{\Delta V/V})$$

- Entonces

$$VaR_T = V(\sum e_i \cdot \mu_i) - V \cdot k_P \cdot \sqrt{\mathbf{w}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}}$$

- Por lo que $VaR_T = \sum \Delta V_i - \sqrt{\mathbf{v}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Omega} \mathbf{v}}$

- Donde Ω es la matriz de correlaciones y *v* es el vector de VaR individual

INGENIERIA INDUSTRIAL UNIVERSIDAD DE CHILE

J. Miguel Cruz 2011

VaR y Procesos Continuos

$$P = \mathrm{Prob}\{\,\mathrm{dV} \geq \mathrm{VaR}\,\}$$

El cambio en el valor de la cartera puede descomponerse en **n** factores de riesgo

$$dV = \frac{\partial V}{\partial f_1} df_1 + \frac{\partial V}{\partial f_2} df_2 + \cdots + \frac{\partial V}{\partial f_n} df_n + \ldots$$

Esto a su vez puede re escribirse como:

$$dV = S_1 \cdot f_1 \cdot d\,\mathrm{Ln}(f_1) + \cdots + S_n \cdot f_n \cdot d\,\mathrm{Ln}(f_1)$$

INGENIERIA INDUSTRIAL UNIVERSIDAD DE CHILE

J. Miguel Cruz 2011

VaR y procesos de difusión

Si los factores de riesgos corresponden a procesos de difusión geométricos correlacionado

$$d\,\mathrm{Ln}(f_i) \equiv dx_i = \mu_i dt + \sigma_i dz_i$$

$$dz_i \rightarrow N(0, dt)$$

$$E(dz_i \cdot dz_j) = \rho_{ij} \cdot dt$$

Entonces el cambio en el valor puede escribirse como combinación de procesos normales

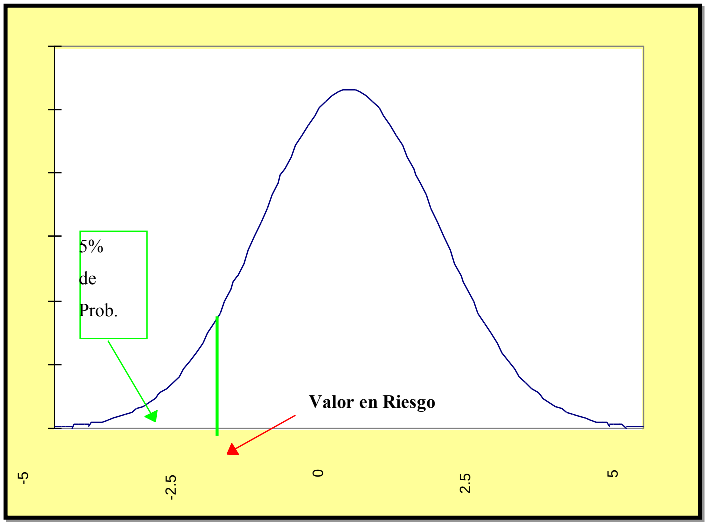
$$dV = w_1 \cdot dx_1 + \cdots + w_n \cdot dx_n \rightarrow N(\mu_V dt, \sigma_V^2 dt)$$

$$\mu_V = \mathbf{w}' \cdot \boldsymbol{\mu} \qquad \sigma_V^2 = \mathbf{w}' \cdot \Sigma \cdot \mathbf{w}$$

INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

J. Miguel Cruz
2011

Si el cambio de la cartera es normal, VaR es directo



INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

J. Miguel Cruz
2011

VaR Covariado

- Encontrar el efecto combinado de todos los factores de riesgos

$$VaRC = \mu_z - \left(\begin{bmatrix} VaR_1 \\ VaR_2 \\ \vdots \\ VaR_n \end{bmatrix}^T \Omega \begin{bmatrix} VaR_1 \\ VaR_2 \\ \vdots \\ VaR_n \end{bmatrix} \right)^{1/2}$$

- Donde

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n \end{bmatrix} \Omega \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n \end{bmatrix}$$

Intuición

- Si el VaR de tasas de 1 día es 100M de $,
- Podemos asegurar con un 95% de confianza que si mañana es 1 día como los últimos 100 días, entonces dada nuestra cartera, no perderemos más que 100M$ por movimientos en las tasas de interés.

Caso 1: VaR de un instrumento y 1 factor de riesgo

Cálculo básico del VaR de una posición en un instrumento,
suponiendo comportamiento lineal :

$$\mathit{VaR} = \underbrace{VP}_{\text{Valor Presente de la Posición}} \cdot \underbrace{k}_{\text{Confianza}} \cdot \underbrace{\sigma_P}_{\text{Volatilidad Precio}} \cdot \underbrace{\sqrt{t}}_{\text{Plazo}}$$

Ejemplo Dólar: $VaR = 5.200 \cdot 1{,}64 \cdot \frac{1{,}5}{100} \cdot 1 = 127{,}9$

Calculando la volatilidad precio

Para un factor de riesgo f que influye en el valor de mercado VP, la volatilidad precio se calcula a partir de la volatilidad de la variable observada σ_f

$$\sigma_P \approx \underbrace{\left(\frac{\Delta VP / VP}{\Delta f / f} \right)}_{\text{Sensibilidad}} \cdot \sigma_f$$

Volatilidad precio y tasa

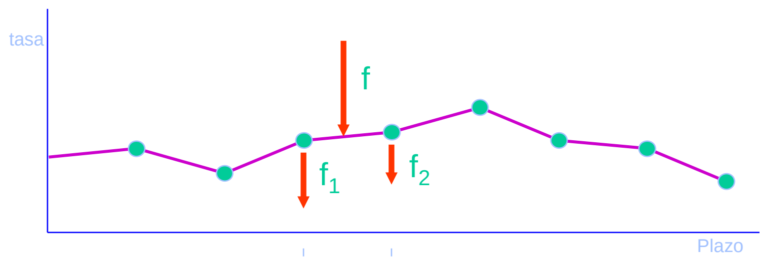
En el caso de la renta fija tendremos que la volatilidad precio se aproxima a la volatilidad tasa de acuerdo a la relación:

$$\sigma_P = -D_M \cdot y \cdot \sigma_y = -\frac{D}{(1+y)} \cdot y \cdot \sigma_y$$

En donde D es duración e y es la tasa de interés relevante

Proceso de "Mapping" (Renta Fija)

- **Mapping de Flujos de Caja:**
  - Valor presente del flujo original igual a la suma de los dos valores presentes resultantes
  - El riesgo de mercado del flujo original sea igual al riesgo de mercado de una cartera que contenga los dos flujos
  - El signo del flujo original debe ser igual al de cada uno de los dos flujos resultantes

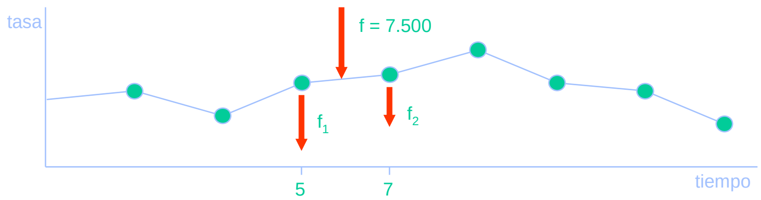


Ejemplo de "Mapping"

Supongamos que disponemos de la siguiente información:

F. Riesgo (años)	Tasa	Vol. Tasa	Corr
5	7,628%	1,503%	0,963
7	7,794%	1,374%	

Y se necesita descomponer un flujo de caja de 7.500 y plazo de 6,08 años.



Paso 1: Igualar Valores Presentes de los flujos

$\alpha \cdot VP(f) = VP(f1)$ y $(1-\alpha)\cdot VP(f) = VP(f2)$

INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

J. Miguel Cruz
2011

"Mapping" : Cont.

Paso 2: **Igualar Valor en Riesgo de la inversión F, con el Valor en riesgo de la inversión F1 + F2 :**

VaR[VP(f)] = VaR[VP(f1)+VP(f2)]

$$VP[f]\cdot k\cdot \sigma_{\Pr 6.08} =$$

$$\sqrt{(VP[f_1]\cdot k\cdot\sigma_{\Pr 5})^2 + (VP[f_2]\cdot k\cdot\sigma_{\Pr 7})^2 + 2\cdot\rho_{5,7}\cdot VP[f_1]\cdot VP[f_2]\cdot k^2\cdot\sigma_{\Pr 5}\cdot\sigma_{\Pr 7}}$$

Lo que equivale a determinar α tal que,

$$\sigma^2_{\Pr 6.08} = \alpha^2\cdot\sigma^2_{\Pr 5} + (1-\alpha)^2\cdot\sigma^2_{\Pr 7} + 2\cdot\rho_{5,7}\cdot\sigma_{\Pr 5}\cdot\sigma_{\Pr 7}\cdot\alpha\cdot(1-\alpha)$$

Paso 3: **Verificar que la solución que se obtiene genera flujos f1 y f2 ambos del mismo signo que f**

INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

J. Miguel Cruz
2011

"Mapping": Cont.

- Para realizar los diferentes pasos, debemos calcular lo siguiente:

Plazo (años)	Tasa	Vol. Tasa	Vol. Precio
5	7,628%	1,503%	0,533%
6,08	7,718%	1,433%	0,620%
7	7,794%	1,374%	0,695%

Cálculos: $D_M \cdot y \cdot \sigma_y$

Interpolación

"Mapping": Resultados

En la práctica, al resolver la ecuación de segundo grado, hay que escoger la solución que se encuentra entre 0 y 1. Si esto no ocurre, usar volatilidad tasa en vez de volatilidad precio.

En el ejemplo anterior, debemos resolver

$$0{,}384 = 0{,}284 \cdot \alpha^2 + 0{,}483 \cdot (1-\alpha)^2 + 0{,}713 \cdot \alpha \cdot (1-\alpha)$$

Lo que equivale a:

$$0{,}54 \cdot \alpha^2 - 0{,}253 \cdot \alpha + 0{,}099 = 0$$

y arroja solución aceptable $\alpha = 0.404$

Plazo (años)	Tasa	Vol. Tasa	Vol. Precio	Flujo	VP
5	7,628%	1,503%	0,533%	3.030	1.928
6,08	7,718%	1,433%	0,620%	7.500	4.773
7	7,794%	1,374%	0,695%	4.470	2.844

Ejemplo de VaR

Ejemplo cartera simple:
+150 millones EUR Cero cupón 5 años
- 59 millones GBP Cero cupón 3 años

Plazo		Principal	TIR		VPN	Tasa FX	VPN US$
5	EUR	**150 MM**	**5.33 %**	EUR	**115.7 MM**	**1.5318**	**75.53 MM**
3	GBP	**-59 MM**	**7.00 %**	GBP	**-48.2 MM**	**1.5499**	**-74.13 MM**
						Valor Neto	**0.89 MM**

INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

J. Miguel Cruz
2011

Ejemplo Cálculo Paramétrico del VaR

Posición		VPN	Vol Precio diaria	v Vector VaR	v VaR en USD
5y Cero EUR	EUR	**115.7 MM**	**0.36 %**	**416,518**	**271,914**
3y Cero GBP	GBP	**-48.2 MM**	**0.23 %**	**-110,770**	**-171,680**
EUR/USD	EUR	**115.7 MM**	**0.64 %**	**740,476**	**483,402**
GBP/USD	GBP	**-48.2 MM**	**0.64 %**	**-308,230**	**-477,730**

- **VaR = {v' * [C] * v}^0.5**

[C]	EUR 5y	GBP 3y	EUR/USD	GBP/USD
EUR 5y	**1.0000**	**0.8058**	**-0.3014**	**-0.1208**
GBP 3y	**0.8058**	**1.0000**	**-0.2149**	**-0.0493**
EUR/USD	**-0.3014**	**-0.2149**	**1.0000**	**0.6557**
GBP/USD	**-0.1208**	**-0.0493**	**0.6557**	**1.0000**

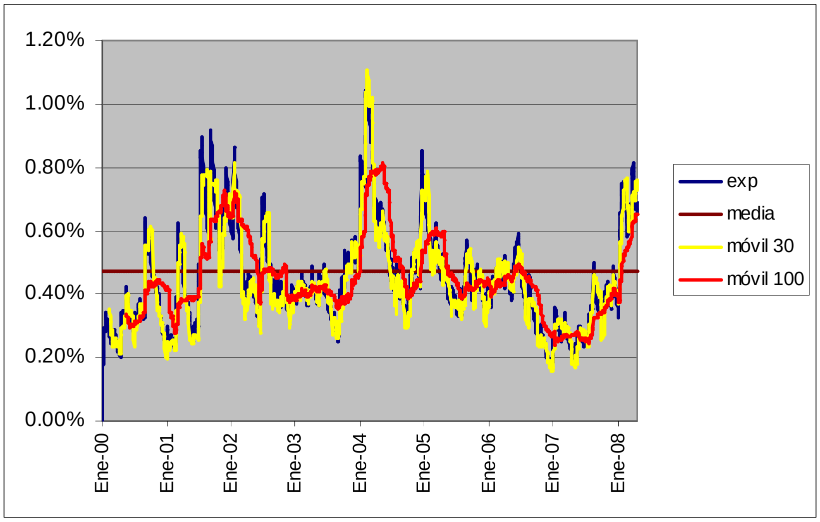
(1 STD: 66% prob) **408,615 USD**

VaR 95% : **670,128 USD**

INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

J. Miguel Cruz
2011

Volatilidad del tipo de cambio



INGENIERIA INDUSTRIAL UNIVERSIDAD DE CHILE

J. Miguel Cruz 2011

Cálculo de Volatilidades y Correlaciones

- **EWMA (Media Móvil Exponencial)**
  - Típicamente supone media cero
  - Pesa más la historia reciente que la pasada

$$\sigma^2_{t+1/t} = (1-\lambda)\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i r^2_{t-i}$$

- **Equivale a**

$$\sigma^2_{t+1/t} = (1-\lambda)\cdot r_t^2 + \lambda\cdot\sigma^2_{t/t-1}$$

INGENIERIA INDUSTRIAL UNIVERSIDAD DE CHILE

J. Miguel Cruz 2011

Caso de covarianzas es similar

- Para el caso de retornos de activos 1 y 2

$$\sigma_{12,t+1/t} = (1-\lambda)\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \cdot r_{1,t-i} \cdot r_{2,t-i}$$

$$\sigma_{12,t+1/t} = (1-\lambda) \cdot r_{1,t} \cdot r_{2,t} + \lambda \cdot \sigma_{12,t/t-1}$$

INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

J. Miguel Cruz
2011

Por lo que el coeficiente de correlación se calcula como:

- Coeficiente de correlación EWMA

$$\rho_{12,t+1/t} = \frac{\sigma_{12,t+1/t}}{\sigma_{1,t+1/t} \cdot \sigma_{2,t+1/t}}$$

INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

J. Miguel Cruz
2011

Pero...riesgo sistemático o riesgo total?

- Usando el supuesto que los accionistas de la empresa diversifican su riqueza en el mercado de capitales, y se comportan como minimizadores de riesgo para un nivel de rentabilidad, entonces,

$$r_i = r_F + \beta_i \cdot (\bar{r}_M - r_F) + \varepsilon_i$$

- Riesgo sistemático es el que vale

$$\sigma_i^2 = \underbrace{\beta_i^2 \cdot \sigma_M^2}_{\text{Riesgo sistemático}} + \underbrace{Var(\varepsilon_i)}_{\text{Riesgo no sistemático (específico)}}$$

INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

J. Miguel Cruz
2011

Cambio de paradigma?

- Supuestos de MM y CAPM
- Los *Practitioners*...y sus tests empíricos
- Hedging
- La revolución del VaR
- Volatility matters...

INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

J. Miguel Cruz
2011

VaR Marginal mide cómo cambia el VaR total cuando cambia el VaR individual

- Para el VaR Paramétrico sabemos que

$$VaR^2 = VI' \cdot \Omega \cdot VI = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} VaR_i \cdot VaR_j \cdot \rho_{ij}$$

- Donde VI es el vector de VaR individuales y Ω es la matriz de correlaciones.
- También puede escribirse en función de los Valores presentes de cada factor de riesgo:

$$VaR^2 = k^2 \cdot VP' \cdot \Sigma \cdot VP = k^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} VP_i \cdot VP_j \cdot \sigma_{ij}$$

INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

J. Miguel Cruz
2011

Estimando el VaR marginal

- Si cambia el VaR individual i, entonces

$$2 \cdot VaR \cdot \frac{\partial VaR}{\partial VI_i} = 2 \cdot (\Omega \cdot \mathrm{VI})_i$$

- Es decir,

$$\frac{\partial VaR}{\partial VI_i} = \frac{(\Omega \cdot \mathrm{VI})_i}{VaR} \equiv \delta_i$$

INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

J. Miguel Cruz
2011

Interpretando el VaR Marginal

- **Notemos que**

$$\frac{(\Omega \cdot \mathrm{VI})_i}{VaR} = \frac{1}{VaR}\sum_{j=1}^{n} VaR_j \cdot \rho_{ij}$$

- **Por otro lado,**

$$VaR^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} VaR_i \cdot VaR_j \cdot \rho_{ij}$$

- **Lo que se puede escribir como:**

$$VaR = \frac{1}{VaR}\sum_{i=1}^{n} VaR_i \sum_{j=1}^{n} VaR_j \cdot \rho_{ij} = \sum_{i=1}^{n} VaR_i \cdot \delta_i$$

El concepto del VaR Incremental

- **Podemos descomponer el VaR total por el impacto que tiene cada VaR individual sobre el VaR marginal**

$$VaR = \sum_{i=1}^{n} VaR_i \cdot \delta_i = \sum_{i=1}^{n} VINCR_i$$

- **El VaR incremental mide el impacto que realiza cada factor de riesgo al incorporar los efectos de las correlaciones**

Analizando el impacto de cambiar el Valor Presente de un factor

- Igual que antes podemos escribir que

$$\frac{\partial VaR}{\partial VP_i} = k^2 \cdot \frac{(\Sigma \cdot VP)_i}{VaR} \equiv k^2 \cdot \beta_i$$

- Lo que implica que llegamos a un resultado similar al planteado antes

$$VaR = k^2 \cdot \frac{1}{VaR} \sum_{i=1}^{n} VP_i \sum_{j=1}^{n} VP_j \cdot \sigma_{ij} = k^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} VP_i \cdot \beta_i$$

INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

J. Miguel Cruz
2011