Auxiliar N° 9

Opciones

Opciones

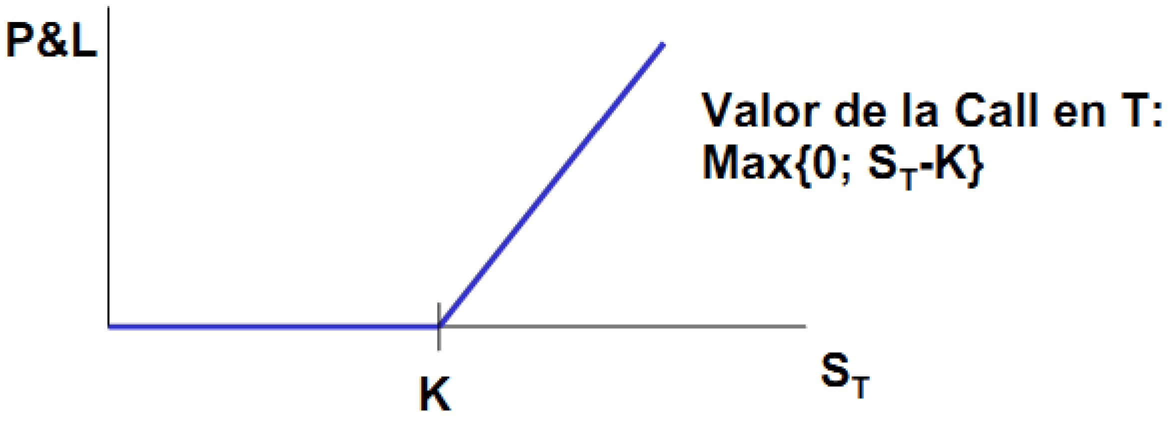
- Derivado no lineal.
- Esquema: quien compra la opción, adquiere el derecho de realizar una transacción de un activo con la contraparte a un precio dado (strike), en algún periodo definido en el contrato antes de una fecha determinada (expiración).
- Call: si la transacción es una compra.
- Put: si es una venta.

Estilos de opciones

- Europea: sólo se puede ejercer en la fecha de expiración.
- Americana: se puede ejercer en cualquier día.
- Opciones exóticas: tiempos de ejercicio más complejos.

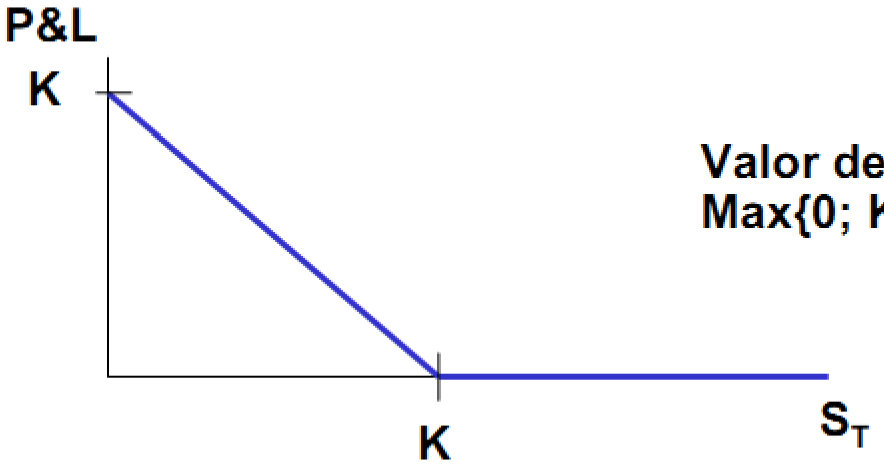
Ejemplos

- Call europea:
  - **Call Europea:**
    - Si $S_T > K$ Compro en K algo que vale S_T, gano S_T -K
    - Si $S_T <= K$ No ejerzo la opción Flujo: 0



Ejemplos

- Put europea:
  - Si $S_T < K$ Vendo en K algo que vale S_T, gano $K-S_T$
  - Si $S_T >= K$ No ejerzo la opción Flujo: 0



Valor de la Put en T:
$\max\{0; K-S_T\}$

Paridad put - call

- Tenemos dos carteras:
- A: una call europea (S,K,T) y efectivo Ke^{-rT}
- B: una put europea (S,K,T) y una unidad de S.
- En T tenemos:

	S<K	**S>K**
Cartera A	Call: 0 Efectivo: K	Call: S-K Efectivo: K
Cartera B	Put: K-S Acción: S	Put: 0 Acción: S

Paridad put - call

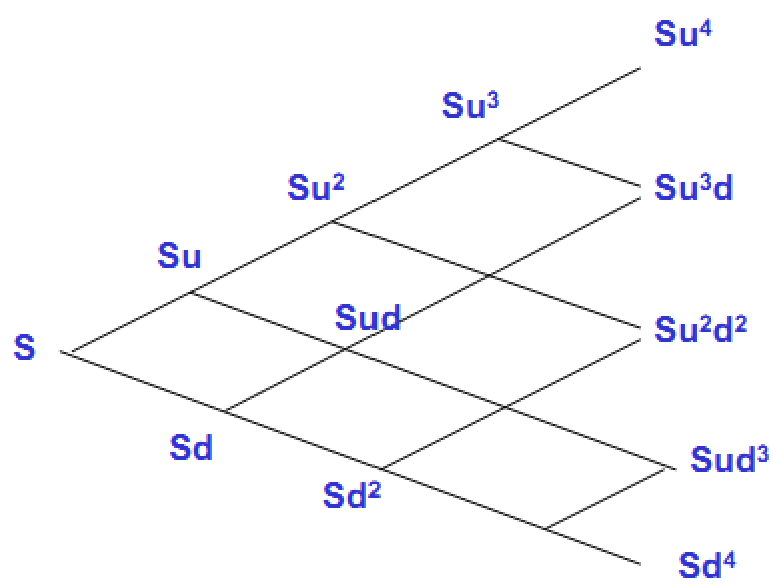
- Ambas carteras valen lo mismo!
- Entonces en valor presente, también deben valer lo mismo (no arbitraje!)
- Luego:
- $C + Ke^{-rT} = P + S(0)$

Valorización de opciones

- Métodos: Árboles binomiales, Ecuación de Black-Scholes, Montecarlo.

Árboles binomiales

- Supuesto: precio en cada período sube en un factor u o baja en un factor d, con probabilidad p y (1-p), respectivamente.



Árboles binomiales

- Cómo calculo u y d?
- Suponemos que el precio de la acción sigue un movimiento browniano.
- Es decir, $\mathbb{E}\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right) = \mu t$, $\mathbb{V}\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right) = \sigma^2 t$
- Luego,
  $\mathbb{E}(S(t)) = S(0)\big(p\ln(u) + (1-p)\ln(d)\big)$
- $\mathbb{V}(S(t)) = S(0)p(1-p)\big(\ln(u) - \ln(d)\big)^2$

Árboles binomiales

- Como falta una ecuación, podemos suponer ud=1 o fijar un valor para p (usualmente ½).
- Caso ud=1.

$$u = A + \sqrt{A^2 - 1} \quad d = A - \sqrt{A^2 - 1}$$

$$A = \frac{1}{2}\left(e^{-\mu\Delta t} + e^{(\mu+\sigma^2)\Delta t}\right)$$

$$p = \frac{e^{-\mu\Delta t} - d}{u - d}$$

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)\sqrt{\Delta t}$$

Árboles binomiales

- Caso p= ½.

$$u = e^{\mu\Delta t}\left(1+\sqrt{e^{\sigma^2\Delta t}-1}\right)$$

$$d = e^{\mu\Delta t}\left(1-\sqrt{e^{\sigma^2\Delta t}-1}\right)$$

$$p = \frac{1}{2}$$

$$u = e^{\mu\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$d = e^{\mu\Delta t-\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$p = \frac{1}{2}$$

Valorizando una opción.

- Hemos construido el árbol de precios del subyacente. ¿Cómo valorizamos una opción?
- Valorización neutra al riesgo!!
- Espíritu: se puede construir una cartera de acciones y activos libres de riesgo que replican los precios de la opción. Así podemos valorizar la opción sin preocuparnos por las preferencias de riesgo del inversor.

Valorizando una opción.

- A primer orden, se tiene que el valor de una call se puede aproximar:
- $C \approx NS - B$
- Con N el número de acciones y B es una suma en efectivo.
- Supongamos que compramos N acciones y pedimos prestado B a tasa libre de riesgo r.

Valorizando una opción

- Si pasa un período, la cartera vale:
- $C^{+} = uNS\ - (1 + r)B$
- $C^{-} = dNS - (1 + r)B$
- Despejando:
- $N = \frac{C^{+} - C^{-}}{(u-d)S}$
- $B = \frac{dSC^{+} - uSC^{-}}{(u-d)S(1+r)} = \frac{NdS - C^{-}}{1+r}$

Valorizando una opción

- Luego:
- C=$\frac{qC^{+}+(1-q)C^{-}}{1+r}$
- $q = \frac{(1+r)S-dS}{(u-d)S}$

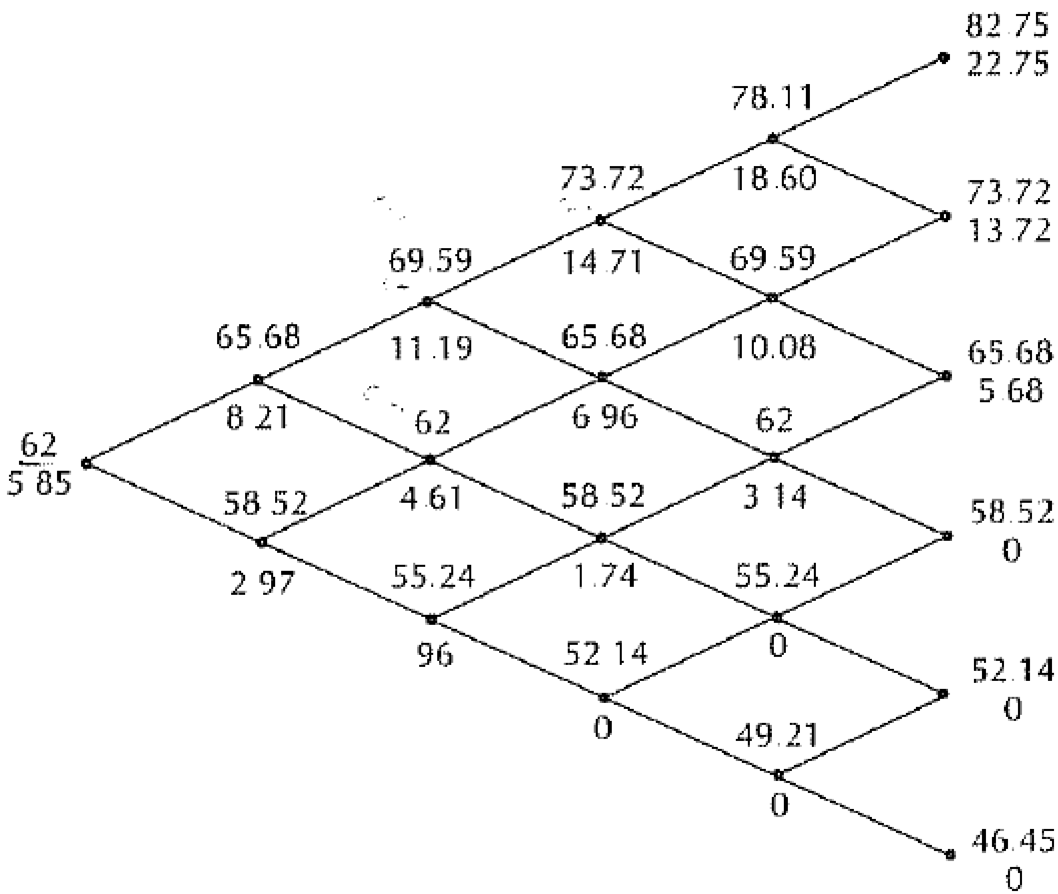
Ejemplo 1

- Sea una accion con volatilidad 20% y precio \$62. Considere una opción call a 5 meses con precio de ejercicio \$60 y tasa de interés 10% anual compuesta mensual.
- Calcule el valor de la opción call.

$$
\begin{aligned}
u &= e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} &&= 1.05943 \\
d &= e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} &&= .94390 \\
R &= 1 + .1/12 &&= 1.00833 .
\end{aligned}
$$

$$q = (R - d)/(u - d) = .55770 .$$

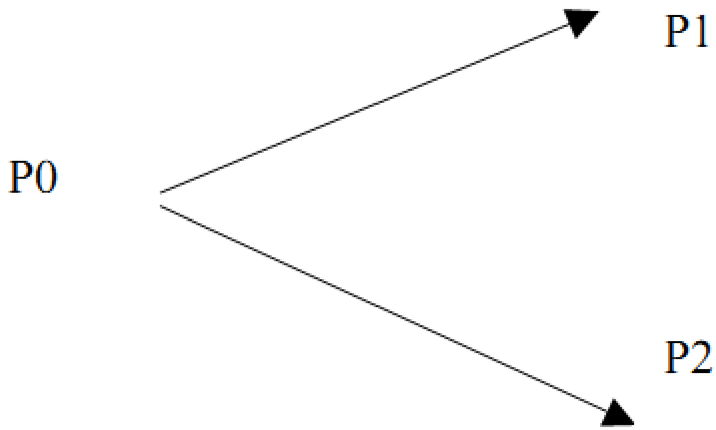
Ejemplo 1


82.75
22.75
78.11
73.72
18.60
73.72
13.72
69.59
14.71
69.59
65.68
11.19
65.68
10.08
65.68
5.68
62
5.85
8.21
62
6.96
62
58.52
4.61
58.52
3.14
58.52
0
2.97
55.24
1.74
55.24
96
52.14
0
52.14
0
0
49.21
0
46.45
0

Ejemplo 2

- Suponga que $dP/P = \mu'_P\, dt + \sigma'_P\, dz$
- Es el proceso para un precio de un activo en el mercado accionario.
- a. Si P0=1, μP es 12% anual, y σP es 40% anual, se pide que encuentre u =1/d tales que
- P1=uxP0, P2=dxP0, de tal forma que representen una buena aproximación del proceso estocástico de precios para el siguiente árbol semanal:

Ejemplo 2



b. Encuentre las probabilidades neutras al riesgo, sabiendo que la tasa libre de riesgo es 3% anual

Ejemplo 2

- c. Usando el árbol calibrado anteriormente valorice hoy un derivado que paga al final de tres semanas la diferencia entre 1 y el precio del activo en la semana 3. Comente su resultado.
- d. Valorice un instrumento derivado que paga al final de tres semanas el máximo entre la rentabilidad del precio del activo accionario o bien la rentabilidad de un depósito a plazo a tres semanas.

Black - Scholes

- Ecuación de Black – Scholes:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0.$$

- Con dividendos

$$\boxed{C_t + (r - \delta)\, SC_s + 1/2\, \sigma^2(S, t)\, S^2\, C_{ss} - rC = 0}$$

Black - Scholes

- Fórmula de Black – Scholes para call europea suponiendo distribución normal:

$$C(S,t) = N(d_1)\ S - N(d_2)\ Ke^{-r(T-t)}$$

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

Black - Scholes

- Para una put se obtiene lo siguiente, gracias a la paridad put – call:

$$\begin{aligned} P(S,t) &= Ke^{-r(T-t)} - S + C(S,t) \\ &= N(-d_2)\; Ke^{-r(T-t)} - N(-d_1)\; S \;. \end{aligned}$$

- N es la distribución acumulada de la normal estándar.

Ejemplo 3.

- Calcule el valor de la call del ejercicio 1 usando BS.

Ejemplo 4

El precio actual de la acción de la empresa "FCO" es \$40. Se sabe que el próximo período el precio de la acción puede aumentar en un 10.6% o caer en un 9.6%. La tasa de interés libre de riesgo es de un 8% anual.

a) Derive un modelo binomial de tres períodos para el precio de "FCO" (esto es, use un mes para cada rama del árbol). Encuentre u, d, r y p.

b) Encuentre el precio al cual se transa hoy día una put europea sobre la acción de "FCO", con vencimiento a tres meses y precio de ejercicio de \$45.

c) Ahora Ud. Se da cuenta de que realmente la opción era americana. Encuentre el precio de la put americana y explique.

d) Suponga que se anuncia la repartición de un dividendo de \$10 por acción en un mes más. Valorice nuevamente la put americana de la parte c). ¿Es el precio encontrado mayor o menor al de la parte c)? Explique.