MA1101-1- Introducción al Álgebra
Profesor: Alejandro Maass
Auxiliares: César Vigouroux - Roberto Villaflor

Auxiliar 8

05 de Diciembre de 2011

P1. (i) Sean A, B, C conjuntos infinitos tales que:

$$A \cap B = A \cap C = \phi,\ |B| = |C|$$

Pruebe que $|A \cup B| = |A \cup C|$.

(ii) Considere el conjunto $C = \{..., -16, -9, -4, -1, 1, 4, 9, 16, ...\}$ dado por los cuadrados de los enteros positivos y sus opuestos. Pruebe que C es infinito numerable.

(iii) Pruebe que el conjunto:

$$F = \{(m, n) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Z} | m + n \in \mathbb{N}\}$$

es infinito numerable.

P2. Sea E un conjunto y $A \neq \phi$ un subconjunto fijo de E. Se define en $\mathcal{P}(E)$ la relación $\mathcal{R}$ por:

$$X\mathcal{R}Y \Leftrightarrow A \setminus X = A \setminus Y$$

(i) Pruebe que $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia.

(ii) Pruebe que $\mathcal{P}(E)/\mathcal{R} = \{[X]_{\mathcal{R}} | X \in \mathcal{P}(A)\}$.

P3. Sea E un conjunto no vacío y $K \in \mathcal{P}(E)$ un conjunto fijo no vacío. Se define en $\mathcal{P}(E)$ la relación $\mathcal{R}_K$ por:

$$A\mathcal{R}_K B \Leftrightarrow B \cap K \subseteq A$$

(a) Pruebe que $\mathcal{R}_k$ es refleja y transitiva.

(b) Proponga un $K \in \mathcal{P}(E)$ tal que $\mathcal{R}_K$ sea relación de orden. Justifique.

P4. Dadas dos relaciones $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ sobre un conjunto A; se define la composición por:

$$(x, z) \in \mathcal{R} \circ \mathcal{S} \Leftrightarrow \exists y \in A : (x, y) \in \mathcal{R} \wedge (y, z) \in \mathcal{S}$$

Ocupamos la notación $\mathcal{R}^n$, con $n \in \mathbb{N}$ para referirnos a la relación $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} \circ \cdots \mathcal{R}$, n veces.

(i) Si $\mathcal{R}$ es una relación refleja sobre A. Definamos la relación:

$$T = \{(x, y) \in A \times A | \exists n, m \in \mathbb{N} : (x, y) \in \mathcal{R}^n \wedge (y, x) \in \mathcal{R}^m\}.$$

Pruebe que T es relación de equivalencia.

(ii) Considere la relación P sobre A/T dada por:

$$P = \{([x]_T, [y]_T) \in A/T \times A/T | \exists n \in \mathbb{N} : (x, y) \in \mathcal{R}^n\}$$

pruebe que P está bien definida (es decir, que si $([x]_T, [y]_T) \in P$ y si $x' \in [x]_T$, $y' \in [y]_T$ entonces $([x']_T, [y']_T) \in P$) y que es relación de orden.