Auxiliar 11

26 de Diciembre de 2011

P1. Sea $(G, *)$ un grupo con neutro $e \in G$ y

$$A = \{F : G \to G | F \text{es un isomorfismo de } (G, *) \text{ en } (G, *)\}$$

(a) Probar que $(A, \circ)$ es un grupo.

(b) Para cada $g \in G$ se define la función $F_g : G \to G$ tal que $F_g = g * x * g^{-1}$ en cada $x \in G$. Pruebe que:

(i) F_g es un homomorfismo de $(G, *)$ en $(G, *)$.

(ii) $F_{g*h} = F_g \circ F_h$, para todo $g, h \in G$.

(iii) $F_e = Id$.

Concluya que F_g es un isomorfismo y que $(F_g)^{-1} = F_{g^{-1}}$ para todo $g \in G$.

(c) Pruebe que $B = \{F_g | g \in G\}$ es un subgrupo de $(A, \circ)$.

P2. (a) En $\mathbb{Z}^2$ se definen las siguientes leyes de composición interna: $\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{Z}^2$

$$\begin{aligned} (a, b) \oplus (c, d) &= (a + c, b + d) \\ (a, b) \odot (c, d) &= (ac, 0) \end{aligned}$$

Sabiendo que $(\mathbb{Z}^2, \oplus)$ es grupo abeliano

(i) Verifique que $(\mathbb{Z}^2, \oplus, \odot)$ es un anillo conmutativo.

(ii) Averigüe si $(\mathbb{Z}^2, \oplus, \odot)$ tiene unidad y/o divisores de cero. Decida si $(\mathbb{Z}^2, \oplus, \odot)$ es un cuerpo.

(b) Sea $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ un cuerpo de orden 3 ($|\mathbb{K}| = 3$).

(i) Construya las tablas para las operaciones $+$ y $\cdot$.

(ii) Encuentre un isomorfismo f entre $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ y $(\mathbb{Z}_3, +_3, \cdot_3)$, explicitando las asignaciones de f.

P3. Se define en $\mathbb{R}$ la l.c.i $*$ por $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$. Se pide:

(a) Probar que $(\mathbb{R}, *, \cdot)$ es cuerpo.

(b) Demuestre que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$ es un isomorfismo de $(\mathbb{R}, *, \cdot)$ en $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

P4. Sea $a \in \mathbb{R}$ fijo. Se define la función $\phi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$ por $\phi(P) = P(a)$, $\forall P \in \mathbb{R}[x]$. Demuestre que ϕ es un homomorfismo sobreyectivo entre los anillos $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ y $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.Decida si ϕ es un isomorfismo.