# Clase auxiliar 3: Cálculo Avanzado

Profesor: Hector Ramirez Aux: Emilio Vilches
Jueves 3 de Noviembre de 2011

**P1.** Sean $f$ y $g$ dos campos escalares de clase $C^1$ y $C^2$, respectivamente, en un abierto no vacío $U \subset \mathbb{R}^3$. Consideremos un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ cuya superficie $\partial\Omega$ es cerrada, regular por pedazos y orientada según la normal exterior $\hat{n}$. Supongamos que $\overline{\Omega} \subset U$. Demuestre que

$$\iiint_\Omega f\Delta g dV = \iint_{\partial\Omega} f\frac{\partial g}{\partial n} dA - \iiint_\Omega \nabla f \cdot \nabla g dV.$$

**P2.** Sean $f$ y $g$ dos funciones escalares de clase $C^2$ en un abierto no vacío $U \subset \mathbb{R}^3$. Consideremos un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ cuya superficie $\partial\Omega$ es cerrada, regular por pedazos y orientada según la normal exterior $\hat{n}$. Demuestre que

$$\iiint_\Omega (f\Delta g - g\Delta f) dV = \iint_{\partial\Omega} \left( f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n} \right) dA$$

**P3.** Demuestre que

$$\iiint_\Omega \frac{1}{r^2} dV = \iint_{\partial\Omega} \frac{\vec{r}\cdot\hat{n}}{r^2} dS$$

donde $\vec{r} = (x, y, z)$ y $r = \|\vec{r}\|$.

**P4.** Sea $S$ una superficie simple cerrada suave a trozos. Pruebe que si $\vec{F}$ es de clase $C^2$, entonces

$$\iint_S \left(\nabla \times \vec{F}\right) \cdot d\vec{S} = 0.$$

**P5.** Calcular el flujo del campo $\vec{F}(x, y, z) = (x - y\cos z, y - x, z - y)$ a través de la superficie S correspondiente a la mitad inferior del toro de eje de simetría $z$, centrado en el origen y de radios mayor $R_0$ y menor $r_0$ ($R_0 > r_0$).

**P6.** Calcular la integral de superficie $\iint_S \nabla\phi \cdot \hat{n} dS$ si $S$ es el hemisferio superior del casquete elipsoidal $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ orientado según la normal interior y $\phi$ es el campo escalar $\phi(x, y, z) = (x + 1)^2 + 2(y - 1)^2 + z^2$.