Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Pauta Ejercicio 2
MA2002 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones

Profesor: Héctor Ramírez
Auxiliares: Roberto Castillo, Emilio Vilches
Jueves 1 de diciembre de 2011

P1.- (2 pts.) Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto y conexo y $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ una función. Pruebe que si f y $\bar{f}$ son holomorfas en Ω, entonces f es constante sobre Ω.

Solución: Sea $f = u + iv$, con $u, v\colon \Omega \to \mathbb{R}$. Luego si f y $\bar{f}$ son holomorfas, entonces se satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann:

$$f \text{ holomorfa} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{1}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{2}$$

$$\bar{f} \text{ holomorfa} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial (-v)}{\partial y} \tag{3}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial (-v)}{\partial x} \tag{4}$$

Así, sumando (1) con (3) y (2) con (4) se obtiene:

$$2\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$
$$2\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Pero Ω es conexo, luego $u = \text{Cte}$ y $v = \text{Cte}$, de donde f es constante.

P2.- (2 pts.) Encuentre los discos de convergencia para las siguientes series de potencias:

$$\text{(i)} \sum_{n\geq 0} (n + 2^n) z^n, \qquad \text{(ii)} \sum_{n \geq 1} 3^{n!} (z-1)^{n!}.$$

Solución:

1. Usando la siguiente desigualdad:

$$2^n \leq n + 2^n \leq 2 \cdot 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$2 \leq \sqrt[n]{n + 2^n} \leq \sqrt[n]{2} \cdot 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

y el teorema del Sandwich, se obtiene que

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+2^n} = 2.$$

Por lo tanto, el radio de convergencia es $R = 1/2$ y el disco de convergencia es: $D(0, 1/2)$.

2. Notemos que

$$\sum_{n\geq 1} 3^{n!}(z-1)^{n!} = \sum_{n\geq 1} a_n(z-1)^n$$

donde

$$a_n = \begin{cases} 3^n & \text{si } n = k! \text{ para algún } k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{si } n \neq k! \text{ para algún } k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Luego,

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n} = 3.$$

Por lo tanto, el radio de convergencia es $R = 1/3$ y el disco de convergencia es: $D(1, 1/3)$.

P3.- (2 pts.) Se sabe que $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y$ corresponde a la parte real de una función holomorfa $f(z)$. Encuentre la parte imaginaria $v(x, y)$ sabiendo que $f(1) = 1 - i$.

Solución: Dado que $u(x, y)$ corresponde a la parte real de una función holomorfa $f(z)$, existe $v(x, y)$ tal que

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Además u y v satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann;

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{6}$$

Además

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2} + 1$$

Así, imponiendo (**??**) e integrando parcialmente c/r a y, se obtiene:

$$v = 2\arctan\left(\frac{y}{x}\right) + y + C(x) \tag{7}$$

donde $C(x)$ es una constante de integración que depende de x. Luego, derivando (**??**) c/r a x e imponiendo (**??**) se tiene:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{-2y}{x^2+y^2} + C'(x)\right) = -\frac{\partial u}{\partial y} = -\left(\frac{2y}{x^2+y^2} - 2\right)$$

de donde $C'(x) = 2$ y así, $C(x) = 2k + k$.

Por lo tanto

$$v(x, y) = 2 \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + y + 2x + k.$$

Finalmente, imponiendo que $f(1) = 1 - i$ se encuentra que

$$v(x, y) = 2 \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + y + 2x - 3.$$