

Intégration et analyse hilbertienne
Corrigé de l'épreuve du 11 Juillet 2005

Exercice 1. — La fonction f étant mesurable, l'image réciproque d'un intervalle appartient à \mathcal{A} et on a donc $A_n \in \mathcal{A}$. La suite des A_n est décroissante et $\bigcap_n A_n = \emptyset$. D'autre part, on a $\mu(A_1) \leq 1$ car dans le cas contraire, on aurait $\int f d\mu \geq \int_{A_1} 1 d\mu > 1$ ce qui contredit l'hypothèse. D'après le théorème 1.3.15 (iii), on a donc $\mu(A_n) \rightarrow \mu(\emptyset) = 0$.

Exercice 2. — (a) On a $X_n(\omega) = 1$ [resp. -1] si $\omega_n = 1$ [resp. 0]. On a $\int |X_n|(\omega)^2 dP(\omega) = 1$. Pour $n \neq m$, on a

$$(X_n | X_m) = \sum_{\alpha, \beta \in \{-1, 1\}} \int_{\{\omega | X_n = \alpha; X_m = \beta\}} \alpha \beta dP = 1/4 - 1/4 - 1/4 + 1/4 = 0.$$

Cela montre que le système est orthonormal. Ce système n'est pas total car la fonction constante égale à 1 est orthogonale à tous les X_n . Ce n'est donc pas une base hilbertienne.

(b) On a $\|G_n\|_{L^\infty} = \sum_1^n \frac{1}{p}$. En effet, $|G_n(\omega)|$ est inférieur en tout point à cette valeur, et lui est égal sur l'ensemble $\{\omega | \omega_1 = \dots = \omega_n = 1\}$ qui est de mesure strictement positive (égale à 2^{-n}). La série de terme général $1/p$ étant divergente, on a $\|G_n\|_{L^\infty} \rightarrow \infty$.

(c) On a $\|G_n\|_{L^2}^2 = \sum_1^n \frac{1}{p^2}$ (Pythagore), les éléments de la somme étant deux à deux orthogonaux. On a donc $\|G_n\|_{L^2} \leq M$ pour tout n , avec $M = (\sum_1^\infty 1/p^2)^{1/2} < \infty$.

On a $\|G_n\|_{L^1} \leq P(\Omega)^{1/2} \|G_n\|_{L^2}$ (prop. 3.4.5) et les $\|G_n\|_{L^1}$ sont donc majorés par la même borne M .

(d) L'espace E_n des fonctions \mathcal{F}_n -mesurables est de dimension 2^n : il a pour base les fonctions $\mathbf{1}_{C_s}$ avec $s = (s_1, \dots, s_n)$. Les éléments de E_n sont orthogonaux aux X_p pour $p > n$. Il suffit de vérifier que les produits scalaires $(X_p | \mathbf{1}_{C_s})$ sont nuls. Or,

$$(X_p | \mathbf{1}_{C_s}) = \int_{\{\omega | \omega_1 = s_1, \dots, \omega_n = s_n, \omega_p = 1\}} 1 dP + \int_{\{\omega | \omega_1 = s_1, \dots, \omega_n = s_n, \omega_p = 0\}} -1 dP = 0,$$

les deux ensembles ci-dessus ayant pour mesure 2^{-n-1} .

Si on considère $\{f \in E_n | (X_1 | f) = \dots = (X_n | f) = 0\}$, c'est donc un sous-espace vectoriel de dimension au moins égale à $2^n - n$ qui est contenu

dans $\{X_1, \dots, X_n, \dots\}^\perp$. La dimension de cet espace, supérieure à $2^n - n$ pour tout n est donc infinie.

Exercice 3. — (a) La fonction figurant sous le signe somme, qui se déduit de f et g par des opérations algébriques et par composition avec la fonction continue $\sqrt{\cdot}$, est mesurable. On a $\sqrt{f(x)^2 + t^2 g(x)^2} \leq |f(x)| + t |g(x)|$ et cette fonction est donc sommable.

(b) Il faut montrer que, pour toute suite t_n tendant vers t_0 , on a $F(t_n) \rightarrow F(t_0)$. La suite convergente t_n est majorée par une certaine constante M . Les fonctions à intégrer sont donc majorées par la fonction $|f(x)| + M |g(x)|$ sommable indépendante de n . D'autre part, pour tout x , on a $\sqrt{f(x)^2 + t_n^2 g(x)^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt{f(x)^2 + t_0^2 g(x)^2}$, et le théorème de Lebesgue entraîne que $F(t_n) \rightarrow F(t_0)$.

(c) La fonction $h(t, x) = \sqrt{f(x)^2 + t^2 g(x)^2}$ admet une dérivée partielle quel que soit $(t, x) \in]0, \infty[\times]0, 1]$. Cette dérivée est nulle si $g(x) = 0$ et sinon

$$\frac{\partial}{\partial t} h(t, x) = \frac{2tg(x)^2}{2\sqrt{f(x)^2 + t^2 g(x)^2}}.$$

On a $|\frac{\partial}{\partial t} h(t, x)| \leq 2tg(x)^2/2t |g(x)| = |g(x)|$, fonction sommable indépendante de t . On peut donc appliquer le théorème de dérivation sous le signe somme, F est dérivable sur $]0, \infty[$, et on a

$$F'(t) = \int_{\{x|g(x) \neq 0\}} \frac{tg(x)^2}{\sqrt{f(x)^2 + t^2 g(x)^2}} dx$$

(d) Pour toute suite t_n tendant vers 0, on a

$$\frac{F(t_n) - F(0)}{t_n} = \int_0^1 \frac{\sqrt{f(x)^2 + t_n^2 g(x)^2} - |f(x)|}{t_n} dx.$$

La fonction φ_n figurant sous le signe somme est majorée en module par $|g(x)|$ (en utilisant le théorème des accroissements finis et la majoration précédente de la dérivée; ou bien en écrivant simplement que $\sqrt{f(x)^2 + t_n^2 g(x)^2} \leq |f(x)| + t_n |g(x)|$). En tout point x où $f(x) \neq 0$, la fonction $t \mapsto \sqrt{f(x)^2 + t^2 g(x)^2}$ a une dérivée nulle à l'origine et on a donc $\varphi_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Par contre, si $f(x) = 0$, on a $\varphi_n(x) = t_n |g(x)| / t_n$ et la limite est donc $|g(x)|$. D'après le théorème de Lebesgue, on a donc

$$\frac{F(t_n) - F(0)}{t_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int \mathbf{1}_{[f^{-1}(0)]} |g(x)| dx = \int_{\{x|f(x)=0\}} |g(x)| dx.$$

Ceci étant valable pour toute suite tendant vers 0, la fonction F admet une dérivée à droite égale à l'intégrale ci-dessus.

Exercice 4. — Traitons en préliminaires toutes les questions de mesurabilité. Les fonctions $(x, y) \mapsto y$ et, pour chaque x , les fonctions $y \mapsto (x, y)$ sont continues donc mesurables. Par composition, la fonction $(x, y) \mapsto f(y)$ est mesurable dans \mathbb{R}^2 et il en est de même du produit $(x, y) \mapsto K(x, y)f(y)$. Enfin, par composition, les application $y \mapsto K(x, y)f(y)$ sont mesurables pour chaque x .

Lorsque f est positive, la mesurabilité de $T_\alpha f(x)$ résulte du théorème 2.4.6. Dans les quatre cas ci-dessous, en décomposant $f = f_1 - f_2 + if_3 - if_4$, les fonctions $T_\alpha f_i$ seront finies hors d'un borélien de mesure nulle, et $T_\alpha f$ sera mesurable et bien définie dans le complémentaire de ce borélien.

Par linéarité de l'intégrale, il est clair que $T_\alpha(f + f') = T_\alpha f + T_\alpha f'$ et que $T_\alpha(\lambda f) = \lambda T_\alpha f$ dès que les intégrales ont un sens. Les opérateurs T_α sont donc linéaires quand ils sont définis.

(a) La fonction K^α est bornée par 1, la fonction figurant sous le signe somme est sommable, et on a $|T_\alpha f(x)| \leq \int |f(y)| dy$ en tout point x . On a donc, $T_\alpha f$ étant mesurable

$$\|T_\alpha f\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1},$$

ce qui exprime que T_α est continu de L^1 dans L^∞ .

(b) La première forme du théorème de Fubini montre que

$$\begin{aligned} \iint K(x, y)^\alpha |f(y)| dx dy &= \int \left\{ \int |f(y)| K(x, y)^\alpha dx \right\} dy \leq \\ &\int \left\{ \int |f(y)| \frac{1}{(1 + |x - 2y|)^\alpha} dx \right\} dy \end{aligned}$$

La quantité $C = \int (1 + |z|)^{-\alpha} dz$ est finie car $\alpha > 1$. L'intégrale entre accolades vaut $C |f(y)|$ (changement de variable $z = x - 2y$) et on a donc

$$\iint K(x, y)^\alpha |f(y)| dx dy \leq C \int |f(y)| dy = C \|f\|_{L^1}.$$

La seconde forme du théorème de Fubini assure alors que $y \mapsto K(x, y)f(y)$ est sommable pour presque tout x et que $T_\alpha f$ ainsi définie presque partout est sommable. De plus

$$\|T_\alpha f\|_{L^1} = \int |T_\alpha f(x)| dx \leq \iint K(x, y)^\alpha |f(y)| dx dy \leq C \|f\|_{L^1}$$

Ce qui exprime que l'application linéaire T_α est continue de L^1 dans L^1 .

(c) On pose $h_x(y) = K(x, y)^\alpha$ et on a

$$\|h_x\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq \int \frac{1}{(1 + |x - 2y|)^{2\alpha}} dy = \int \frac{1}{(1 + |2z|)^{2\alpha}} dz = D < \infty$$

car $2\alpha > 1$. On a donc pour chaque x

$$|T_\alpha f(x)| = |(h_x | f)_{L^2}| \leq \|h_x\|_{L^2} \|f\|_{L^2}$$

d'après Cauchy-Schwarz. On a donc $\|T_\alpha f\|_{L^\infty} \leq \sqrt{D} \|f\|_{L^2}$, ce qui exprime que T_α est continu de L^2 dans L^∞ .

(d) On applique le théorème de Fubini à la fonction positive $(x, y, z) \mapsto K(x, y)^\alpha K(x, z)^\alpha |f(y)| |f(z)|$:

$$\begin{aligned} \iiint K(x, y)^\alpha K(x, z)^\alpha |f(y)| |f(z)| dx dy dz = \\ \iint |f(y)| |f(z)| \left\{ \int K(x, y)^\alpha K(x, z)^\alpha dx \right\} dy dz \end{aligned}$$

En notant cette fois-ci $m_y(x) = K(x, y)^\alpha$, on a comme précédemment $\|m_y\|_{L^2}^2 \leq \int (1 + |z|)^{-2\alpha} = E < \infty$. L'intégrale figurant dans l'accolade est donc majorée (Cauchy-Schwarz) quels que soient y et z par $\|m_y\|_{L^2} \|m_z\|_{L^2} \leq E$. On a donc

$$\int_{\mathbb{R}^3} K(x, y)^\alpha K(x, z)^\alpha |f(y)| |f(z)| dx dy dz \leq E \iint |f(y)| |f(z)| dy dz = E \|f\|_{L^1}^2.$$

On peut maintenant appliquer la seconde forme du théorème de Fubini : pour presque tout x , la fonction $K(x, y)^\alpha K(x, z)^\alpha f(y) \bar{f}(z)$ est sommable en (y, z) et son intégrale, qui vaut presque partout $|T_\alpha f(x)|^2$ est sommable. De plus

$$\begin{aligned} \|T_\alpha f\|_{L^2}^2 &= \int |T_\alpha f(x)|^2 dx \leq \\ &\iint K(x, y)^\alpha K(x, z)^\alpha |f(y)| |f(z)| dx dy dz \leq E \|f\|_{L^1}^2. \end{aligned}$$

Cela montre que T_α est continu de L^1 dans L^2 .