

## MEDIDA E INTEGRACIÓN

Profesor Cátedra : Joaquín Fontbona  
Profesor Auxiliar : Mauricio Duarte

TAREA

27 DE MAYO DE 2005

### Pregunta 1

1. Dividimos este problema en dos partes:

- (a) Consideremos  $\nu$  una medida con signo finita en  $([0, 1], \mathcal{B})$  tal que  $\nu(\{0\}) = 0 = \nu([0, 1])$ . Si definimos  $F(x) = \nu([0, x])$  entonces  $F$  es de variación acotada y es continua por la derecha. Pruebe que si  $f$  es de clase  $\mathcal{C}^1$ , entonces

$$\int_0^1 f d\nu = - \int_0^1 F(x) f'(x) dx.$$

- (b) Supongamos que  $\mu$  es una medida finita en  $([0, 1], \mathcal{B})$  tal que si  $g$  es una función de clase  $\mathcal{C}^1$  salvo en un número finito de puntos, entonces:

$$\left| \int_0^1 g' d\mu \right| \leq C \|g\|_\infty$$

donde  $C$  es una constante finita independiente de  $g$ . Pruebe que  $L(g) = \int_0^1 g' d\mu$  se puede extender de forma continua a  $C([0, 1])$  verificando

$$|L(g)| \leq C \|g\|_\infty$$

para toda función continua  $g$ . Concluya que existe una medida con signo finita tal que  $L(g) = \int_0^1 g d\nu$  cualquiera sea  $g$  continua. Pruebe que  $\nu$  verifica las hipótesis de (a) y por lo tanto cualquiera sea  $g$  de clase  $\mathcal{C}^1$  se tendrá:

$$\int_0^1 g' d\mu = \int_0^1 g d\nu = - \int_0^1 F(x) g'(x) dx.$$

Finalmente concluya que  $d\mu = -F(x)dx$  y por lo tanto  $\mu$  tiene una densidad con respecto a la medida de Lebesgue.

### Pregunta 2: Medida invariante en un espacio métrico compacto

Sea  $(X, d)$  espacio métrico compacto y  $T : X \rightarrow X$  una aplicación continua. Se demostrará que existe una medida de probabilidad regular  $\mu$  tal que  $\mu = \mu \circ T^{-1}$ .

Para ello se estudiará el siguiente objeto, definido para  $x_0 \in X$  fijo,  $f \in C(X)$  cualquiera y  $n \in \mathbb{N}$ :

$$m(x_0, f, n) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k(x_0)) \in \mathbb{R}.$$

$C(X)$  denota aquí el espacio de funciones continuas  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , que es un Banach separable para la norma uniforme  $\|f\| := \sup_{x \in X} |f(x)|$ . Denotaremos por  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión densa en  $C(X)$ .

- i) Pruebe que existe una sucesión  $(n_k^{(1)})_{k \in \mathbb{N}}$  de naturales tal que

$$m(x_0, f_1, n_k^{(1)}) \text{ converge cuando } k \rightarrow \infty$$

- ii) Deduzca que existen subsucesiones  $(n_k^{(i)})_k \subseteq (n_k^{(i-1)})_k \subseteq \dots \subseteq (n_k^{(1)})_k$  tales que  $m(x_0, f_j, n_k^{(i)})$  converge cuando  $k \rightarrow \infty$  para todo  $j = 1, \dots, i$ .
- iii) Pruebe que para todo  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m(x_0, f_m, n_k^{(m)})$  converge cuando  $k \rightarrow \infty$  a un límite que llamaremos  $L(x_0, f_m)$ . Pruebe que además

$$|L(x_0, f_m) - L(x_0, f_n)| \leq \|f_m - f_n\|$$

y deduzca que  $L(x_0, \cdot)$  admite una única extensión continua a todo  $C(X)$ . Denotaremos por  $L(x_0, \cdot)$  la extensión.

- iv) Pruebe que para todo  $f \in C(X)$  se tiene  $L(x_0, f \circ T) = L(x_0, f)$
- v) Pruebe que existe una única medida de probabilidad regular definida en  $\beta(X)$  tal que

$$L(x_0, f) = \int f d\mu \quad \forall f \in C(X)$$

Concluya que  $\mu = \mu \circ T^{-1}$ . Indicación: muestre que para  $f \in L^1(X, \beta(X), \mu \circ T^{-1})$  se tiene

$$\int_X f d(\mu \circ T^{-1}) = \int_X f \circ T d\mu.$$