

Corrigé de l'épreuve d'«Intégration et analyse hilbertienne»

EXERCICE 1. (a) Par hypothèse, il existe M et M' avec $|f(x)| \leq M$ et $|f'(x)| \leq M'$ pour tout x . Les fonctions $\varphi(x, y)$ figurant sous le signe somme dans la définition de $h_n(x)$ sont majorées en module par $M|f(y)|$ et sont donc sommables sur $[1/2, 2]$. Elles sont dérivables par rapport à x pour tout $(x, y) \in \mathbb{R} \times [1/2, 2]$ et on a $\partial\varphi/\partial x = y^n f'(xy^n)g(y)$. On a donc $|\partial\varphi/\partial x(x, y)| \leq M'2^n |g(y)|$. Le membre de droite étant sommable, le théorème de dérivation sous le signe somme assure que h_n est dérivable et que $h'_n(x) = \int_{1/2}^2 y^n f'(xy^n)g(y) dy$.

(b) Fixons $x \neq 0$. Les fonctions $y \mapsto f(xy^n)g(y)$ sont majorées en module par la fonction sommable $y \mapsto M|f(y)|$. D'autre part, lorsque n tend vers l'infini, $f(xy^n)g(y)$ tend vers $ag(y)$ si $y \in [1/2, 1[$ et vers $bg(y)$ si $y > 1$. D'après le théorème de Lebesgue, on a donc

$$h_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \int_{1/2}^1 g(y) dy + b \int_1^2 g(y) dy \quad \text{si } x \neq 0$$

Pour $x = 0$, la limite est différente : les $h_n(0)$ sont tous égaux à $a \int_{1/2}^2 g(y) dy$.

(c) En appliquant le théorème de Fubini à la fonction positive $|f(xy^n)g(y)|$, on obtient

$$\int |h_n(x)| dx \leq \iint |f(xy^n)| |g(y)| dx dy = \int_{1/2}^2 |g(y)| \left\{ \int_{\mathbb{R}} |f(xy^n)| dx \right\}$$

L'intégrale figurant sous l'accolade vaut $y^{-n} \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt = Ky^{-n}$ avec $K < \infty$ par hypothèse. On a donc

$$\int |h_n(x)| dx \leq \int_{1/2}^2 Ky^{-n} |g(y)| dy \leq K2^n \int_{1/2}^2 |g(y)| dy < \infty$$

et la fonction h_n est sommable sur \mathbb{R} .

EXERCICE 2. (a) La fonction T vaut 1 si $\omega \in C_{(1)}$, elle vaut 2 si $\omega \in C_{(0,1)}$ et, plus généralement, on a $T(\omega) = p$ si et seulement si $\omega \in C_{\sigma_p}$ où $\sigma_p = (0, \dots, 0, 1)$ (avec $p-1$ zéros). Les ensembles C_{σ_p} étant disjoints, on a

$$T(\omega) = \sum_1^\infty p \mathbf{1}_{C_{\sigma_p}}(\omega).$$

La fonction T , somme d'une série de fonctions mesurables est donc mesurable.

(b) La fonction $\omega \mapsto f(T(\omega))$ vaut $f(p)$ sur C_{σ_p} et on a donc $f \circ T = \sum_1^\infty f(p) \mathbf{1}_{C_{\sigma_p}}$. D'après le (corollaire du) théorème de Beppo Levi, on a donc

$$\int f(T(\omega)) dP(\omega) = \sum f(p) P(C_{\sigma_p}) = \sum 2^{-p} f(p).$$

EXERCICE 3. (a) L'application Φ est un difféomorphisme de Q sur lui-même, dont le jacobien vaut -1 . On a donc, par la formule de changement de variable pour les fonctions positives

$$\|f \circ \Phi\|_2^2 = \iint_Q |\tilde{f}(y, x)|^2 dx dy = \iint_Q |\tilde{f}(x, y)|^2 dx dy = \|f\|_2^2.$$

(b) Il est clair que la somme de deux éléments de F (ou le produit par un scalaire d'un élément de F) appartient à F et il reste à montrer que tout élément f de l'adhérence de F appartient à F . Il existe alors une suite (f_n) , avec $f_n = f_n \circ \Phi$ telle que $f_n \rightarrow f$ dans L^2 . On a $\|f \circ \Phi - f_n \circ \Phi\|_2 = \|(f - f_n) \circ \Phi\|_2 = \|f - f_n\|_2 \rightarrow 0$. La suite f_n converge donc aussi vers $f \circ \Phi$, ce qui montre que $f \in F$.

(c) Soit T [resp. T'] le triangle formé des $(x, y) \in Q$ vérifiant $y < x$ [resp. $y > x$]. Pour $f \in F$, on a

$$\begin{aligned} \iint_Q \bar{f}(x, y) g(x, y) dx dy &= \iint_T \bar{f}(x, y) g(x, y) dx dy + \iint_{T'} \bar{f}(x, y) g(x, y) dx dy \\ &= \iint_T \bar{f}(x, y) (g(x, y) + g(y, x)) dx dy \quad (*) \end{aligned}$$

par changement de variable (nous omettons le tilde notant les représentants). Si $g(x, y) = -g(y, x)$ on a donc $g \in F^\perp$.

Pour montrer la réciproque, remarquons que tout $h \in L^2(T)$ est la restriction à T d'un élément $f \in F$ (il suffit de poser $f(x, y) = h(y, x)$ pour $(x, y) \in T'$ et $f(x, y) = h(x, y)$ pour $(x, y) \in T$). Si $g \in F^\perp$, on a donc d'après (*)

$$\forall h \in L^2(T), \quad \iint_T \bar{h}(x, y) (g(x, y) + g(y, x)) dx dy$$

La fonction $(g(x, y) + g(y, x))$ orthogonale à tout $L^2(T)$ doit être nulle (*p.p.*) dans T et donc dans Q . L'espace F^\perp est donc constitué des classes de fonctions g vérifiant $g(x, y) = -g(y, x)$ *p.p.*, ou encore des $g \in L^2(Q)$ tels que $g \circ \Phi = -g$.

EXERCICE 4. (a) La fonction f est de carré sommable et donc sommable sur l'intervalle borné $[0, x]$. On a

$$\int_0^x f(t) dt \leq \|f\|_2 \left\| \mathbf{1}_{[0, x]} \right\|_2 = \sqrt{x} \|f\|_2$$

par Cauchy-Schwarz, d'où le résultat.

(b1) La fonction positive Tf est majorée par la fonction valant 0 pour $x \leq a$ et C/x pour $x \geq a$, avec $C = \int_a^b f(t) dt$. On a $\int (Tf(x))^2 dx \leq C^2 \int_a^\infty x^{-2} dx < \infty$.

(b2) On applique le théorème de Fubini pour les fonctions positives

$$\int Tf(x) Tf(x) dx = \int \frac{dx}{x^2} \iint_{s \leq x; t \leq x} f(s) f(t) ds dt.$$

L'intégrale dans le carré de côté x est égale au double de l'intégrale dans le triangle $0 \leq s \leq t \leq x$ et on obtient

$$\|Tf\|_2^2 = 2 \iint_{0 \leq s \leq t} f(s) f(t) ds dt \int_t^\infty \frac{dx}{x^2} = 2 \int f(t) \left\{ \frac{1}{t} \int_0^t f(s) ds \right\} dt = 2 \int f(t) Tf(t) dt$$

(b3) Par Cauchy-Schwarz, on a $\|Tf\|_2^2 \leq 2 \|f\|_2 \|Tf\|_2$ et, ces quantités étant finies, le résultat.

(c) La suite (f_n) converge en croissant vers f et on a donc $\int f_n^2(x) dx \rightarrow \int f^2(x) dx$ par Beppo Levi. Pour chaque x , en appliquant le même théorème à $\int_0^x f_n(t) dt$, on obtient que $Tf_n(x)$ converge en croissant vers $Tf(x)$. Une dernière application du théorème de Beppo Levi montre alors que $\int (Tf_n(x))^2 dx \rightarrow \int (Tf(x))^2 dx$. En appliquant le résultat de (b3) aux f_n , on a

$$\int (Tf_n(x))^2 dx \leq 4 \int f_n^2(x) dx$$

Pour $n \rightarrow \infty$, le membre de droite converge vers $\|f\|_2^2$ qui est fini, et la limite du membre de gauche est donc finie. On a ainsi $Tf \in L^2$ et l'inégalité.

(d) La linéarité est évidente et il suffit de montrer que l'on a aussi $\|Tf\|_2 \leq 2 \|f\|_2$ pour f à valeurs complexes. En posant $g(x) = |f(x)|$, on a $|Tf(x)| \leq Tg(x)$ et donc $\int |Tf(x)|^2 dx \leq \|Tg\|_2^2 \leq 4 \|g\|_2^2 = 4 \|f\|_2^2$.