

TEORÍA DE LA MEDIDA – CONTROL 3

JAIME SAN MARTÍN, ANDRÉS FIELBAUM, CRISTÓBAL GUZMÁN
30 DE NOVIEMBRE 2009

P1. Consideremos $K : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ una función continua. Para cada $f \in L^1([0, 1], \mathcal{L}, dx)$ definimos

$$Tf(x) = \int_0^1 K(x, y)f(y) dy.$$

- (1) (1 punto) Pruebe que $T : L^1([0, 1], \mathcal{L}, dx) \rightarrow L^1([0, 1], \mathcal{L}, dx)$ es un operador lineal continuo.
- (2) (5 puntos) Pruebe que Tf es una función continua y que

$$|Tf(x) - Tf(z)| \leq \max\{|K(x, y) - K(z, y)| : y \in [0, 1]\} \int_0^1 |f(y)| dy$$

Concluya que si $F = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una familia de funciones integrables tales que $\|f_n\|_1 \leq 1$ para todo n , entonces la familia $\{Tf_n : n \in \mathbb{N}\}$ es equicontinua y uniformemente acotada. Finalmente pruebe que existe subsucesión n_k tal que $(Tf_{n_k})_k$ converge en L^1 .

P2. Consideremos $I = \{1, \dots, n\}$ un conjunto finito. Sea P una matriz de tamaño $n \times n$, tal que para todo i, j se tiene $P_{ij} \geq 0$ y para todo i $\sum_{j \in I} P_{ij} = 1$. Una matriz de este estilo se llama estocástica. Las potencias de ésta matriz P^m son también matrices estocásticas. En particular P^0 es la matriz identidad. Le puede ser útil recordar que para todo $0 \leq k \leq m$ $(P^m)_{ij} = \sum_{l \in I} (P^{m-k})_{il} (P^k)_{lj}$. También consideraremos $\lambda \in \mathbb{R}_+^n$ un vector de probabilidades, es decir para todo $i \in I$ $\lambda_i \geq 0$, y $\sum_j \lambda_j = 1$.

Para cada colección $0 \leq \ell_1 < \dots < \ell_k$ de números naturales definimos la medida de probabilidad en I^k dada por

$$\mu_{\ell_1, \dots, \ell_k}(\{i_1\} \times \dots \times \{i_k\}) = \sum_{j \in I} \lambda_j (P^{\ell_1})_{ji_1} (P^{\ell_2 - \ell_1})_{i_1 i_2} \dots (P^{\ell_k - \ell_{k-1}})_{i_{k-1} i_k}.$$

Por ejemplo $\mu_{1,2,3}(\{i\} \times \{j\} \times \{l\}) = \sum_{s \in I} \lambda_s P_{si} P_{ij} P_{jl}$ y además $\mu_{0,1,3}(\{i\} \times \{j\} \times \{l\}) = \lambda_i P_{ij} (P^2)_{jl}$. Note que I^k es un conjunto finito y por lo tanto la medida $\mu_{\ell_1, \dots, \ell_k}$ queda totalmente determinada por su valor en cada punto de I^k . Así tenemos que para $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(I^k)$

$$\mu_{\ell_1, \dots, \ell_k}(\mathcal{A}) = \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{A}} \mu_{\ell_1, \dots, \ell_k}(\{i_1\} \times \dots \times \{i_k\}).$$

Pruebe que existe una única medida de probabilidad \mathbb{P} en $(I^{\mathbb{N}}, \mathcal{P}(I^{\mathbb{N}}))$ tal que

$$\mathbb{P}(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_k = i_k) = \lambda_{i_0} P_{i_0 i_1} P_{i_1 i_2} \dots P_{i_{k-1} i_k},$$

donde X_ℓ es la coordenada ℓ de un elemento $\omega = (j_k)_{k \in \mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$ dada por $X_\ell(\omega) = j_\ell$.

Ind. Utilice directamente el Teorema de Kolmogorov pensando que $I \subset \mathbb{R}$. Esta medida \mathbb{P} se llama la cadena de Markov de ley inicial λ y matriz de transición P .

- P3.** (a) (2 puntos) Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y \mathcal{G} una sub- σ -álgebra de \mathcal{F} . Supongamos que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una colección de variables aleatorias integrables \mathcal{F} medibles y que están uniformemente acotadas por una variable aleatoria Y también integrable

$$|X_n(\omega)| \leq Y(\omega)$$

\mathbb{P} -c.t.p.. Supongamos que (X_n) converge c.t.p. a la variable aleatoria X . Notemos que entonces $(X_n)_n$ converge en $L^1(\mathcal{F}, \mathbb{P})$ a la variable X .

Pruebe que

$$\mathbb{E}(X_n | \mathcal{G}) \rightarrow \mathbb{E}(X | \mathcal{G}),$$

en $L^1(\mathcal{G}, \mathbb{P})$.

- (b) (2 puntos) Suponga que X, Y son variables aleatorias no negativas acotadas. Suponga además que $X\mathbb{E}(Y | \mathcal{G}) \leq 1$ demuestre que

$$\mathbb{E}(XY | \mathcal{G}) \leq 1.$$

Ind. Puede suponer en un principio que $\mathbb{E}(Y | \mathcal{G}) \geq a > 0$ para alguna constante a .

- (c) (2 puntos) Considere el espacio medible $([0, 1], \mathcal{B})$ y $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una transformación continua. Pruebe que para cada medida regular μ definida en $([0, 1], \mathcal{B})$ existe una única medida regular μ_T tal que para toda f continua

$$\int f \circ T d\mu = \int f d\mu_T.$$

Pruebe además que si μ es una medida de probabilidad, μ_T también es medida de probabilidad.

Ind. Piense en el teorema de Riesz.

TIEMPO 4 hrs.