Auxiliar 10: Teoría de la Medida

Profesor: Alejandro Maass
Auxiliares: Amitai Linker - Felipe Subiabre
20 de diciembre de 2011

P1. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida con μ acotada, y sea $G \subseteq X$ no medible. Definimos:

- $\overline{G} \in \mathcal{A}$ un conjunto tal que $\mu^*(\overline{G}) = \mu^*(G)$
- $\underline{G} \in \mathcal{A}$ un conjunto tal que $\mu_*(\underline{G}) = \mu_*(G)$
- $\overline{\mu}$, $\underline{\mu}$ medidas en $\mathcal{A}$ tales que $\overline{\mu}(A) = \mu(A \cap \overline{G})$, y $\underline{\mu}(A) = \mu(A \cap \underline{G})$
- $\overline{\gamma}$ y $\underline{\gamma}$ las densidades de Radon-Nikodym asociadas a $\overline{\mu}$ y $\underline{\mu}$

(a) Muestre que $\overline{G}$ y $\underline{G}$ siempre existen, y que $\overline{\mu}$, $\underline{\mu}$ son medidas. Muestre además que

$$\sigma(\mathcal{A} \cup \{G\}) \;=\; \{(A \cap G) \cup (B \cap G^c),\;\; A, B \in \mathcal{A}\}$$

(b) Muestre que para toda funcion medible γ, en que $\underline{\gamma} \leq \gamma \leq \overline{\gamma}$, se tiene que $\nu : \sigma(\mathcal{A} \cup \{G\}) \to \mathbb{R}_0^+$ dado por

$$\nu(E) \;=\; \int_A \gamma d\mu \;+\; \int_B (1-\gamma) d\mu, \quad E = (A \cap G) \cup (B \cap G^c)$$

Está bien definido, es una medida en $\sigma(\mathcal{A} \cup \{G\})$, y extiende a μ

(c) Muestre que para toda extensión $\nu : \sigma(\mathcal{A} \cup \{G\}) \to \mathbb{R}_0^+$, existen $\overline{G}$ y $\underline{G}$ como antes, tales que ν tiene esta forma

P2. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de probabilidad, y sea $T : L^p(X) \to L^p(X)$ con $1 \leq p < \infty$ un operador lineal tal que:

- $\|T\| = 1$
- $T(1) = 1$
- $\forall g \in L^\infty(X),\; f \in L^p(X),\;\; T(gT(f)) = T(g)T(f)$

Buscamos mostrar que entonces existe una sub-σ-algebra $\mathcal{G}$ tal que para todo f en $L^p(X)$, $T(f) = \mathbb{E}(f|\mathcal{G})$. Para ello:

(a) Muestre que, para $f, g \geq 0$, en L^p y L^q (respectivamente), entonces:

$$\int_X fg d\mu = \|f\|_p \|g\|_q \implies \exists c \in \mathbb{R},\;\; \text{tal que } f^p = cg^q$$

(b) Defina el operador adjunto, $T^* : L^q(X) \to L^q(X)$, en que $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ y muestre que $T^*(1) = 1$

(c) Muestre que en un espacio de medida finita, se tiene que $\|f\|_p \overset{p\to\infty}{\longrightarrow} \|f\|_\infty$

(d) Utilice el resultado anterior, junto a la desigualdad de Hölder, para demostrar que para $f \in L^\infty(X)$, $T(f) \in L^\infty(X)$

(e) Defina $\Phi := \{\phi \in L^\infty(X),\ \ T(\phi) = \phi\}$ y $\mathcal{G}$ la σ-álgebra generada por estas funciones. Utilice el siguiente

Teorema 1 *(Clase monótona funcional): Sea X un conjunto y K una colección de funciones acotadas sobre X, que es cerrada bajo multiplicación. Sea $\mathcal{G}$ la σ-álgebra generada por las funciones en K. Sea además H un espacio vectorial de funciones que contiene a K y a las constantes, y tal que*

Dada una función acotada f, tal que existe una secuencia no negativa $\{f_n\} \subseteq H$ creciente a f, entonces $f \in H$.

Entonces H contiene a cada función g, $\mathcal{G}$-medible y acotada

Muestre que $T(g) = g$ para cada g acotada y $\mathcal{G}$-medible.

(f) Muestre que para $f \in L^\infty$, $T(f) = \mathbb{E}(f|\mathcal{G})$, y extienda el resultado a $L^p(X)$

P3. Muestre que para cualquier $A \subseteq \mathbb{R}$ de medida infinita, existe $f \in L^2(\mathbb{R})$ que no es integrable en A. Extienda este resultado a cualquier espacio de medida σ-finito.