fcfm Ingeniería de Minas
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

FENÓMENOS DE TRASPORTE EN METALURGIA EXTRACTIVA

Clase 04/06

Transporte de Momentum

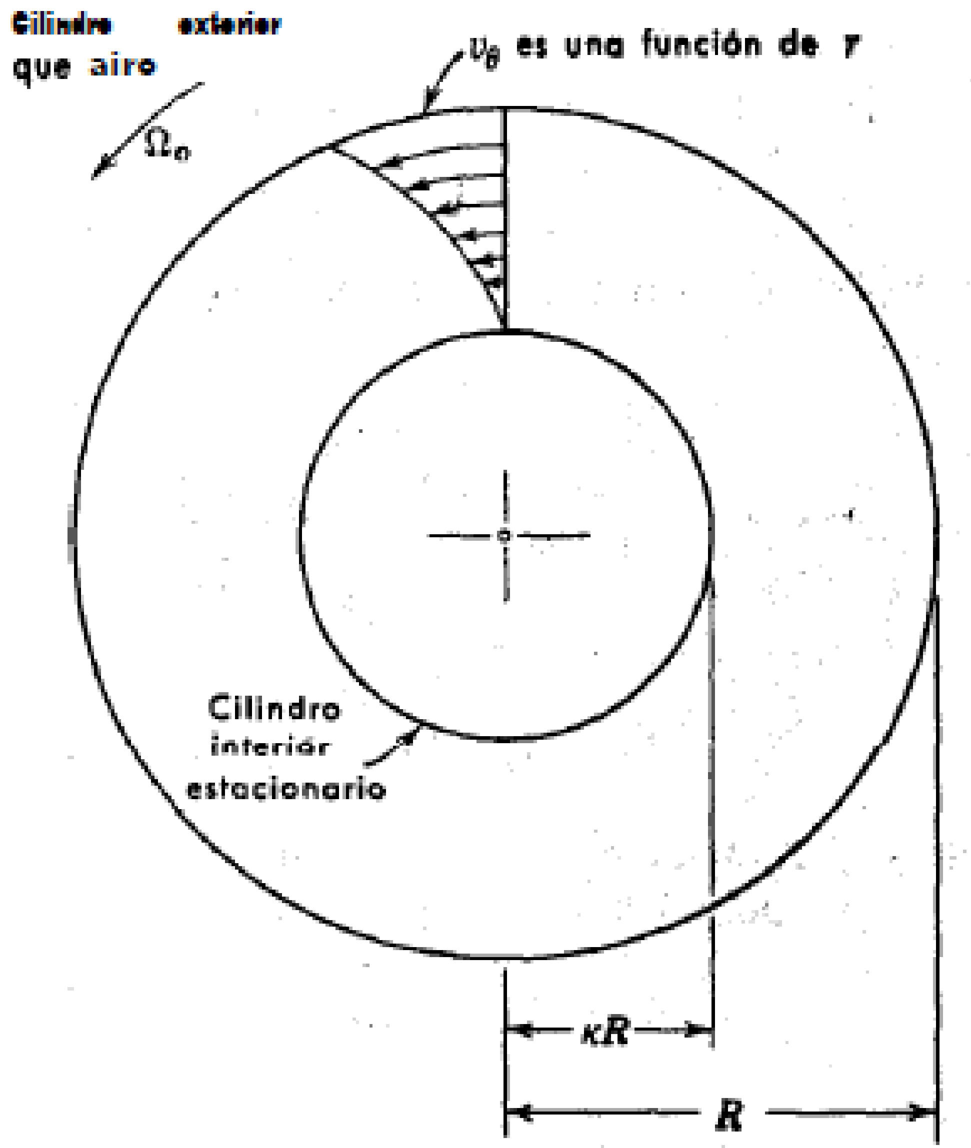
Prof. Leandro Voisin A, MSc., Dr.

Académico – Universidad de Chile.
Jefe del Laboratorio de Pirometalurgia.
Investigador Senior - Tohoku University, Japan.

Flujo tangencial de un fluido Newtoniano en tubos concéntricos

Determinar las distribuciones de velocidad y de esfuerzo cortante, para el flujo laminar tangencial de un fluido incompresible en el espacio comprendido entre dos cilindros verticales coaxiales, cuando el cilindro exterior gira con una velocidad angular Ω_q.

Los esfuerzos finales pueden despreciarse.



Flujo tangencial de un fluido Newtoniano en tubos concéntricos

Solución:

De acuerdo al enunciado sólo debemos preocuparnos del componente-θ de la ec. de movimiento. Al trabajar en coordenadas cilíndricas, para flujo paralelo se tendrá que:

$$v_r = v_z = 0$$

Además para un fluido incomprensible la ecuación de continuidad se escribe como:

$$\nabla \cdot v = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0$$

Luego sólo debemos analizar el componente-θ de la ec. de Navier Stokes

Flujo tangencial de un fluido Newtoniano en tubos concéntricos

Solución:

Ecuación de Continuidad:

Cylindrical coordinates (r, θ, z):

$$\cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t}} + \cancel{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\rho r v_r)} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta) + \cancel{\frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z)} = 0 \qquad \text{(B)}$$

Ecuación de Movimiento:

r-component*

$$\rho\left(\cancel{\frac{\partial v_r}{\partial t}} + \cancel{v_r \frac{\partial v_r}{\partial r}} + \cancel{\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}} - \frac{v_\theta^2}{r} + \cancel{v_z \frac{\partial v_r}{\partial z}}\right) = -\frac{\partial P}{\partial r}$$

$$+ \mu\left[\cancel{\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r)\right)} + \cancel{\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2}} - \cancel{\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}} + \cancel{\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}}\right] + \cancel{\rho g_r} \qquad \text{(D)}$$

Flujo tangencial de un fluido Newtoniano en tubos concéntricos

Solución:

Ecuación de Movimiento:

θ-component

$$\rho\left(\cancel{\frac{\partial v_\theta}{\partial t}} + \cancel{v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r}} + \cancel{\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}} + \cancel{\frac{v_r v_\theta}{r}} + \cancel{v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z}}\right) = \cancel{-\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta}}$$

$$+ \mu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta)\right) + \cancel{\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2}} + \cancel{\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}} + \cancel{\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}}\right] + \cancel{\rho g_\theta} \qquad \text{(E)}$$

z-component

$$\rho\left(\cancel{\frac{\partial v_z}{\partial t}} + \cancel{v_r \frac{\partial v_z}{\partial r}} + \cancel{\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}} + \cancel{v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}}\right) = -\frac{\partial P}{\partial z}$$

$$+ \mu\left[\cancel{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)} + \cancel{\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}}\right] + \rho g_z \qquad \text{(F)}$$

Flujo tangencial de un fluido Newtoniano en tubos concéntricos

Solución:

Ecuación de Movimiento:

Componente en -r: $$\rho \frac{v_\theta^2}{r} = \frac{\partial p}{\partial r}$$

Componente en -θ: $$0 = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r v_\theta)}{\partial r} \right)$$

Componente en -z: $$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_x$$

Flujo tangencial de un fluido Newtoniano en tubos concéntricos

Solución:

Incorporando las condiciones de borde:

$v_\theta = 0, \qquad r = \kappa R$ — *Condición de no deslizamiento ó adherencia, interfase líquido-sólida.*

$v_\theta = \Omega_\theta R, \qquad r = R$ — *Condición de adherencia con desplazamiento de interfase líquido-sólida .*

$$\Rightarrow \qquad v_\theta = \Omega_\theta R \frac{\left(\dfrac{\kappa R}{r} - \dfrac{r}{\kappa R}\right)}{\left(\kappa - \dfrac{1}{\kappa}\right)}$$

Flujo tangencial de un fluido Newtoniano en tubos concéntricos

Solución:

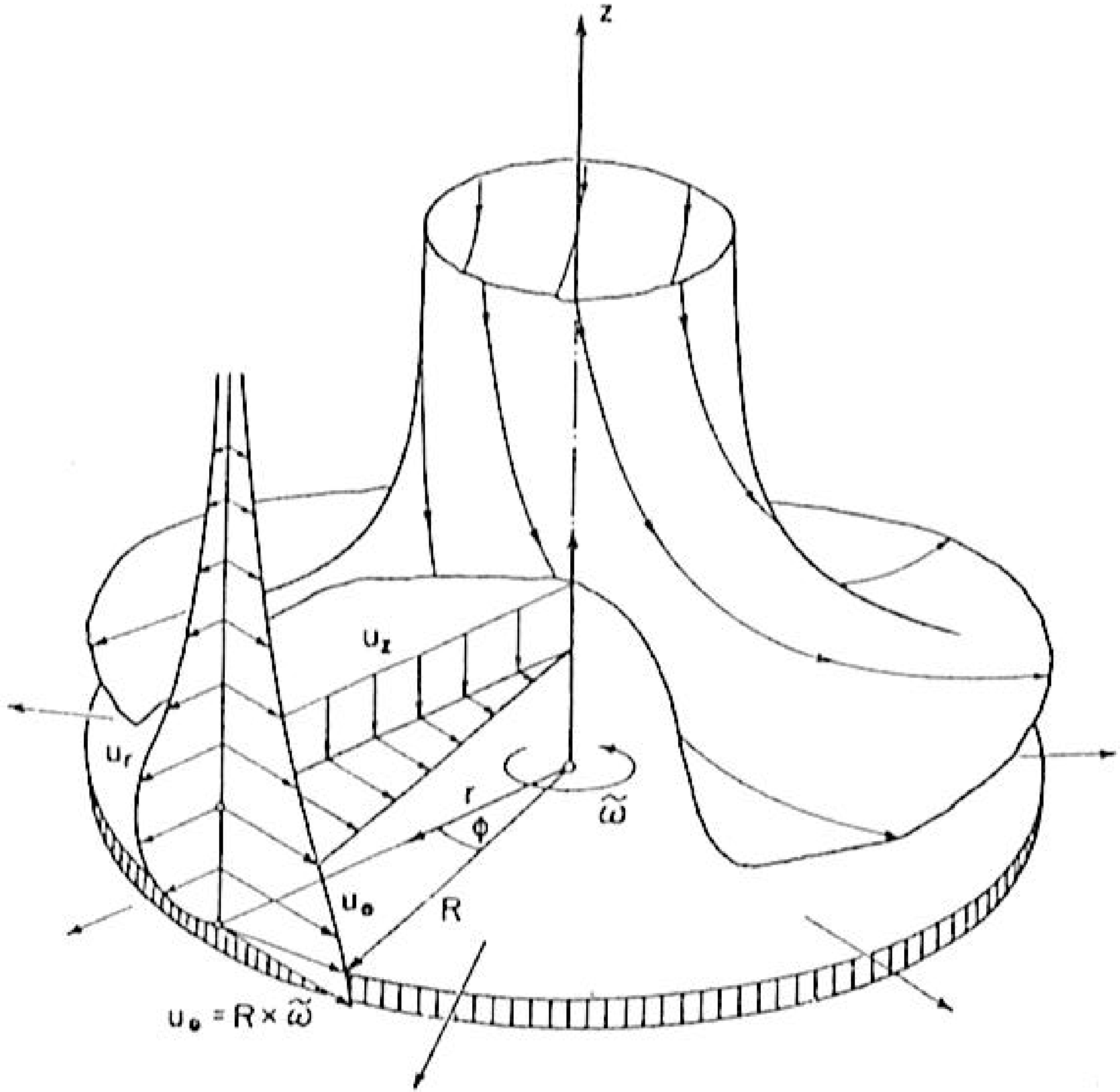
Considerando la ley de viscosidad de Newton:

$\tau_{r\theta}(r):$

$$\Rightarrow \quad \tau_{r\theta}(r) = -\mu\left\{ r\frac{\partial}{\partial r}\left[\Omega_\theta R \frac{\left(\dfrac{\kappa R}{r} - \dfrac{r}{\kappa R}\right)}{\left(\kappa - \dfrac{1}{\kappa}\right)} \right]\right\}$$

$$\tau_{r\theta}(r) = -2\mu\Omega_\theta R^2\left(\frac{1}{r^2}\right)\left(\frac{\kappa^2}{1-\kappa^2}\right)$$

Campo de flujo desarrollado en un fluido dentro del cual rota un disco



Campo de flujo desarrollado en un fluido dentro del cual rota un disco

Solución:

Para flujo tridimensional incomprensible, con simetría respecto a θ, la ecuación de continuidad está dad como:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r) + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

En estado estacionario, las tres componentes de la ecuación de movimiento pueden escribirse de la siguiente forma:

$$u_r\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{{u_\theta}^2}{r} + u_z\frac{\partial u_r}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\mu}{\rho}\left[\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_r}{r}\right) + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}\right]$$

componente radial

Campo de flujo desarrollado en un fluido dentro del cual rota un disco

Solución:

$$u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_r u_\theta}{r} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} = \frac{\mu}{\rho}\left[\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\theta}{r}\right) + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2}\right]$$

componente tangencial

$$u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho}\left[\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right]$$

componente axial

Campo de flujo desarrollado en un fluido dentro del cual rota un disco

Solución:

Las condiciones de borde considerando no deslizamiento serán:

$$u_r = 0 \quad \text{en} \quad z = 0$$

$$u_\theta = r\tilde{\omega} \quad \text{en} \quad z = 0$$

$$u_z = 0 \quad \text{en} \quad z = 0$$

$$u_r = 0$$

$$u_\theta = 0$$

Flujo tangencial de un fluido Newtoniano en tubos concéntricos que giran opuestamente

Propuesto:

Comportamiento de viscosímetros