



Conductividad Termica y Ley de Fourier

o Conductividad Termica:

Consideremos la misma geometría de las placas planas paralelas, sin embargo nos olvidaremos del esfuerzo de corte que vimos anteriormente sobre la viscosidad, e impondremos una diferencia de temperatura $\Delta T > 0$, pero relativamente pequeña, entre las placas, tal que T_N , la temperatura de la placa superficial, sea mayor que la de la placa inferior (ver figura). La pregunta es, ¿cuál es la distribución de temperatura en el fluido lubricante?

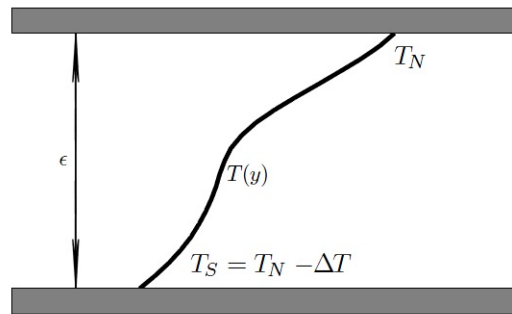


Figura 1: Definición del problema para definir el coeficiente de conducción térmica.

Dado que no existe movimiento (velocidad) del fluido que pueda transportar el calor, el transporte de calor en estas condiciones se debe a la conducción térmica (calor transmitido por actividad molecular), que transporta calor de zonas de mayor temperatura a zonas de menor temperatura, y se expresa como:

$$\vec{q} = -\kappa \nabla T$$

donde \vec{q} es el flujo de calor por unidad de superficie (vector), κ es el coeficiente de conductividad térmica (escalar, propiedad del fluido), y ∇T es el gradiente de la temperatura (vector). La ecuación anterior es conocida como la **Ley de Fourier**.

Dada esta definición podemos calcular cómo varía la temperatura en la dirección \hat{y} (figura anterior), para lo cual consideraremos condiciones permanentes, es decir que la distribución de temperatura no varía en el tiempo. Bajo estas condiciones es posible ver que el flujo de calor permanece constante en \hat{y} ya que, en caso contrario, habría zonas que acumularían calor en el tiempo, mientras que otras lo perderían continuamente, violando así el supuesto de condiciones permanentes. Es así que, si q_y es el flujo de calor en la dirección \hat{y} , constante, entonces:

$$q_y = -\kappa \frac{\partial T}{\partial y}$$

y por lo tanto,

$$T(y) = -\frac{q_y}{\kappa}y + C_1$$

donde C_1 se obtiene de las condiciones de borde del problema, es decir, $T(y = \epsilon) = T_N$ o bien, $T(y = 0) = T_N - \Delta T$. Dada la forma de cómo se enunció el problema, ambas condiciones de borde son necesarias ya que el flujo de calor q_y no es un dato. Por lo tanto, al reemplazar ambas condiciones de borde para obtener el valor de C_1 y q_y , se llega finalmente a:

$$T(y) = T_N - \frac{\Delta T}{\epsilon}(\epsilon - y)$$

y que

$$q_y = -\kappa \frac{\Delta T}{\epsilon}$$

Cabe mencionar que este perfil lineal de temperatura es válido si la diferencia de temperaturas ΔT es pequeña, ya que para ΔT grande otros procesos entran a gobernar la dinámica. En particular, la temperatura del fluido define en gran medida su densidad y coeficiente de conducción térmica, de manera que cambios grandes en la temperatura pueden inducir reorganización del fluido ya que, en palabras comunes, "fluidos más densos tienden ubicarse más abajo en la columna de fluido".

Por último, las dimensiones del coeficiente de conducción térmica κ quedan determinadas al reconocer que el flujo de calor es, por definición, energía por unidad de tiempo y por unidad de superficie, por lo tanto, κ , se suele medir en $[\frac{W}{m \cdot ^\circ K}]$ o en $[\frac{cal}{cm \cdot s \cdot ^\circ K}]$, y q_i en $[\frac{W}{m^2}]$ o en $[\frac{cal}{cm^2 \cdot s}]$, respectivamente.

Ahora, al igual que para la viscosidad μ vista anteriormente, la importancia radica en encontrar el valor de la conductividad térmica κ . Para este propósito, es que existen métodos análogos a los mostrados para la viscosidad, entre los cuales destacan los modelos **empíricos-gráficos**, mostrados a continuación:

- **Para gases poliatómicos, ecuación de Eucken**

$$\kappa = \mu \left(C_p + \frac{1,25 \cdot R}{M} \right)$$

Donde, κ es la conductividad térmica de la sustancia, μ es el coeficiente de viscosidad de la sustancia, M es el peso molecular de la sustancia, C_p es la capacidad calorífica a presión constante, y R es la constante de los gases ideales.

- **Para una mezcla de gases, ecuación de Wilke**

$$\kappa_{mezcla} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i \cdot \kappa_i}{\sum_{j=1}^n x_j \cdot \Phi_{ij}}$$

$$\Phi_{ij} = \frac{1}{\sqrt{8}} \left(1 + \frac{M_i}{M_j} \right)^{-\frac{1}{2}} \left[1 + \left(\frac{\mu_i}{\mu_j} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{M_j}{M_i} \right)^{\frac{1}{4}} \right]^2$$

Donde, $\kappa_{mezcla} [\frac{cal}{cm \cdot s \cdot ^\circ K}]$ es la conductividad calorífica de la mezcla de gases, $x_{i,j}$ son las fracciones molares de las sustancias, Φ_{ij} es un adimensional, función de las sustancias presentes en la mezcla, $M_{i,j} [\frac{gr}{mol}]$ son los pesos moleculares de las sustancias, y $\kappa_{i,j} [\frac{cal}{cm \cdot s \cdot ^\circ K}]$ son las conductividades caloríficas de las sustancias.

- **Para una mezcla de gases, ecuación alternativa**

$$\kappa_{mezcla} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot \kappa_i \cdot M_i^{1/3}}{\sum_{i=1}^n x_i \cdot M_i^{1/3}}$$

○ **Conductividad térmica en sólidos:**

La conducción de electrones en metales desde un gas de electrones obedece a la mecánica cuántica.

$$C_{v,el} = \frac{\pi^2 n_e \kappa_b^2 T}{2\epsilon_F} ; \bar{V}_F = \frac{2\epsilon_F}{m_e} ; \kappa = \frac{C_v \bar{V} \lambda}{3} ; \kappa_{el} = \frac{\pi^2 n_e \kappa_b^2 T \lambda_{el}}{3m_e \bar{V}_F}$$

Donde, $C_{v,el}$ es la contribución electrónica a la capacidad calórica volumétrica de un metal, n_e es el numero de electrones libres por cm^3 , ϵ_F es la energía de Fermi, y κ_{el} es la contribución de los electrones a la conductividad térmica. La energía de Fermi se relaciona con la velocidad promedio de los electrones.

Para probar que los electrones en un metal arrastran la mayor porción de energía térmica, la conductividad eléctrica y térmica se relacionan:

$$L = \frac{\kappa_{el}}{\sigma_e T} = \frac{\pi}{3} \left(\frac{\kappa_B}{e} \right)^2 = 2,45 \times 10^{-8} \left[\frac{W\Omega}{K^2} \right]$$

Tambien se puede usar la siguiente relación para L :

$$L = \frac{\kappa \rho}{T}$$

Donde, $\rho[\Omega m]$ es la resistividad eléctrica.

En compuestos semiconductores:

$$L = 2 \left(\frac{\kappa_B}{e} \right)^2 + \left(\frac{\kappa_B}{e} \right)^2 \frac{1}{(\sigma_n + \sigma_p)} \left(4 + \frac{E_g}{RT} \right)^2$$

Donde, σ_n es la conductividad eléctrica via electrones en la banda de conducción, σ_p la conductividad eléctrica en los huecos de la banda de valencia, y E_g es la energía del gap entre las bandas.

○ **Conductividad térmica en líquidos:**

Para líquidos se trabaja con la expresión de **Bridgman-Bird**:

$$\kappa = 2,8 \kappa_B V_s \left(\frac{N_0}{\hat{V}} \right)^{2/3} ; V_s = \left[\frac{C_p}{C_v} \left(\frac{1}{\rho \beta} \right) \right]^{1/2}$$

Donde, V_s es la velocidad del sonido en el líquido y β es la compresibilidad.

Para sales fundidas (**Lida & Guthrie**):

$$\kappa = 3,3 \times 10^{-7} \frac{U_s}{\hat{V}^{2/3}} ; U_s = \left(\frac{T_m}{M} \right)^{1/2}$$

Donde, $T_m[^\circ K]$ es el punto de fusión y, $M[g/mol]$ es la masa molecular.

○ **Conductividad térmica en grandes materiales:**

$$\kappa_{eff} = K_c (1 - \omega)$$

$$P_b = 4,32 \times 10^{-21} \left(\frac{T}{D_p \cdot d^2} \right)$$

Donde, κ_{eff} es la conductividad en materiales porosos, $P_b[Pa]$ es la presión de lo que se conoce como Packed Bed (partículas apretadas), $D_p[m]$ es el diámetro promedio de la partícula y, $d[nm]$ es el diámetro medio de la molécula de gas.

Si la presión actual es mayor que P_b , no se realiza corrección del valor κ_g , en caso contrario (Presión actual es menor que P_b) se corrige la conductividad térmica en la fase gaseosa:

$$\kappa_g = \frac{\kappa_g^\circ}{1 + 4,95 \times 10^{-22} \left(\frac{C_p/C_v}{1+C_p/C_v} \right) \left(\frac{1-\omega}{\omega} \right) \left(\frac{T \kappa_g^\circ}{P D_p d^2 C_p \eta} \right)}$$

Se determina:

$$1 < \frac{\kappa_s}{\kappa_g} < 6000$$

Se calcula la conductividad térmica efectiva del Packed Bed:

$$\frac{\kappa_b}{\kappa_g}$$

Si, se considera el efecto de la radiación:

$$\kappa_r^\circ = 22,91 \epsilon D_p \left(\frac{T^3}{10^8} \right)$$

$$\kappa_r = \frac{1 - \omega}{(1/\kappa_s) + (1/\kappa_r^\circ)} + \omega \kappa_r^\circ$$

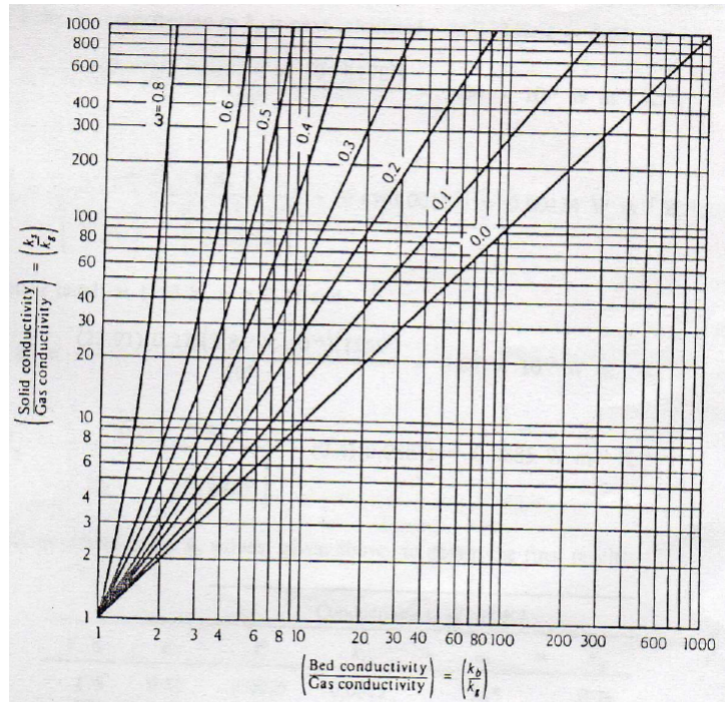


Figura 2: Relación grafica entre $\frac{\kappa_b}{\kappa_g}$ y $\frac{\kappa_s}{\kappa_g}$.

Transferencia de Calor

o **Transferencia de Calor:**

Sabemos que el calor se genera por disipación eléctrica, roce, origen nuclear y, por reacciones químicas. Por su parte, la transferencia de calor ocurre por tres mecanismos conocidos:

- **Conducción:** Asociado a Sólidos.
- **Convección:** Asociado a Fluidos.
- **Radiación:** Asociado a Ondas Electromagnéticas.

o **Conducción:**

La conducción térmica de distintos materiales depende de sus propiedades atómicas o internas. En este caso, el modelo que describe la transferencia de calor, no es más que la ley de Fourier:

$$q_n = -\kappa \frac{\partial T}{\partial n}$$

Donde n es la dirección en la cual se quiere calcular el flujo. Esta ley responde a la primera ley de la termodinámica, ya que el calor se transfiere de las regiones de mayor temperatura a las de menor.

Por otra parte, de la termodinámica también tenemos que:

$$q = \rho C_p \Delta T$$

De esta forma, definimos el coeficiente de difusividad térmica:

$$\alpha = \frac{\kappa}{\rho C_p} = \frac{\text{Calor Conducido}}{\text{Calor Almacenado}} \left[\frac{m^2}{s} \right]$$

Luego:

$$q = \alpha \frac{\partial(\rho C_p (T - T_{ref}))}{\partial n}$$

• **Balance de Calor:**

Sabemos que la entalpía se define como:

$$\begin{aligned} H &= U + P \cdot V \\ \Leftrightarrow dH &= dU + VdP + PdV \end{aligned}$$

en la mayoría de los procesos metalúrgicos se trabaja a volumen y presión constantes, luego:

$$dH = dU$$

que nos dice que el cambio de entalpía marca el cambio de energía interna del cuerpo. Por otro lado, sabemos que:

$$dU = dQ + dW_{ext} - P_{ext}dV$$

Y, como $P = cte$ y $V = cte$, luego $dW_{ext} = 0$ y $dV = 0$,

$$\Rightarrow dU = dQ$$

luego, por definición:

$$C_p = \frac{dQ_p}{dT}$$

$$\Rightarrow C_p = \frac{dH}{dT}$$

Con esto tenemos que, al pasar de:

$$\text{Estado}_1 \rightarrow \text{Estado}_2 \Rightarrow \Delta H = H_2 - H_1$$

Si $\Delta H < 0$ entonces el proceso es exotérmico, en caso contrario ($\Delta H > 0$), el proceso es endotérmico. Por lo general, se trabaja con entalpías estandar a $298[^\circ K]$ y $1[atm]$.

Ahora, para una reacción química se tiene:

$$\Delta H_{Rx} = \Delta H_{\text{Productos}} - \Delta H_{\text{Reactantes}}$$

y, como

$$dH = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_P dT + \left(\frac{\partial H}{\partial P} \right)_T dP$$

pero, la mayoría de los procesos ocurren a presión constante, entonces:

$$\Rightarrow dH = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_P dT$$

y por definición:

$$C_p = \frac{dH}{dT}$$

Entonces:

$$\Delta H_{T_1 \rightarrow T_2} = \int_{T_1}^{T_2} C_p dT$$

Empíricamente, se sabe que:

$$C_p = a + bT + cT^{-2} + dT^2$$

Por lo que, en forma general:

$$\Delta H_{298[^\circ K] \rightarrow T_2} = \Delta H_A^\circ + \int_{298[^\circ K]}^{T_{fus}} C_{p(s)} dT + \Delta H_{fus} + \int_{T_{fus}}^{T_i} C_{p(l)} dT$$

y, para la reacción global:

$$\Delta H = \sum_{\text{Productos}} n_i \Delta H_i - \sum_{\text{Reactantes}} n_i \Delta H_i$$

con

$$n_i = \frac{m_i}{M_i}$$

El balance de calor nos entregará la energía transferida en el proceso en Joule $[J]$. La ecuación de Fourier implica una tasa de transferencia ($[J/s] = [Watt]$) y, por simplicidad normalizada por el área de transferencia ($[Watt/m^2]$).

- **Simplificación de la Conducción (Método de las Resistencias):**

En terminos sencillos (y realizando un balance del calor transmitido), la ley de Fourier para n cuerpos en contacto transmitiendo calor por conducción desde un punto a una temperatura T_0 a otro con una temperatura T_n , se puede escribir como:

$$q \left[\frac{W}{m^2} \right] = \frac{(T_n - T_0)}{\sum_{i=1}^n R_i}$$

Donde $\sum_{i=1}^n R_i$ representa la suma de resistencias existentes expresadas según su geometría como:

– Rectangular:

$$R_i = \frac{\Delta x_i}{\kappa_i}$$

Donde Δx_i es el ancho de la superficie con conductividad κ_i .

– Cilíndrica:

$$R_i = \frac{\ln(r_{i+1}/r_i)}{\kappa_i}$$

En donde, entre r_{i+1} y r_i esta la superficie con conductividad κ_i .

Hay que tener cuidado al usar este metodo, pues la expresión para la resistencia R_i puede cambiar no solo según la geometría, sino que también con los diferentes tipos de transferencias de calor (convección sobre todo).

- o **Convección:**

Ocurre debido al movimiento del seno del fluido, es decir, el lugar con temperatura más distinta a la interface. Principalmente, depende de propiedades como μ , κ , ρ , C_p y V , además de la configuración geométrica y aspereza de la superficie sólida. Existen dos tipos de convección, la natural y la forzada.

Se define el coeficiente de transferencia de calor h como la velocidad de la transferencia de calor entre una superficie sólida y un fluido por unidad de área superficial por unidad de temperatura.

$$h = -\kappa_{fluido} \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} \left[\frac{W}{m^2 \cdot ^\circ K} \right]$$

- **Numero de Nusselt:**

$$Nu = \frac{h D_e}{\kappa}$$

Donde D_e es el diametro equivalente. Representa el mejoramiento de la transferencia de calor a través de una capa de fluido como resultado de la convección en relación a la conducción a través de la misma capa, en síntesis:

$$Nu = \frac{q_{conveccion}}{q_{conduccion}}$$

- **Numero de Prandtl:**

Parámetro por medio del cual se describe el espesor relativo de las capas límites de velocidad y térmica. En síntesis, como el movimiento hace variar la temperatura.

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\mu C_p}{\kappa}$$

- **Convección Natural:**

Como su nombre lo dice, se lleva a cabo por una corriente de convección natural, aumentando la velocidad de transferencia.

◦ **Numero de Grashof:**

$$Gr_L = \frac{g\beta(T_s - T_\infty)L_c^3}{\nu^2}$$

Donde g es la gravedad, β el coeficiente de expansión volumetrica definido como:

$$\beta = \frac{-1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)$$

Para gases ideales:

$$\beta = \frac{1}{T}$$

Representa la relación entre la fuerza de empuje y la fuerza viscosa que actúan sobre el fluido.

$$Gr > 10^9 \rightarrow \text{Flujo Turbulento}$$

Cuando tenemos un flujo externo involucrando convección natural, una buena forma de discriminar la importancia relativa de cada una es por:

$$\frac{Gr_L}{Re_L^2} \ll 1 \rightarrow \text{Natural Despreciable}$$

$$\frac{Gr_L}{Re_L^2} \gg 1 \rightarrow \text{Forzada Despreciable}$$

$$\frac{Gr_L}{Re_L^2} \approx 1 \rightarrow \text{Ambos Importantes}$$

◦ **Numero de Rayleigh:**

$$Ra_L = Gr_L \cdot Pr$$

La gracia es que típicamente:

$$Nu = C(Gr_L \cdot Pr)^n = CRa_L^n$$

Es decir, es una función de ambos numeros. La importancia radica en poder determinar Nu , para calcular:

$$h = \frac{\kappa Nu}{D_e}$$

Donde D_e es el diametro equivalente.

• **Convección Forzada:**

En este caso, existe una fuerza externa impulsando el movimiento del fluido. También, se tiene la siguiente relación:

$$Nu = C \cdot Re^m \cdot Pr^n$$

Dependiendo de la geometría. Aun así, se tiene:

$$h = \frac{\kappa Nu}{D_e}$$

◦ **Radiación:**

$$\text{Cuerpo Negro} \rightarrow q = \sigma \cdot T^4$$

$$\text{Cuerpo Gris} \rightarrow q = e \cdot T^4$$

Donde σ es la constante de Stefan-Boltzman:

$$\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \left[\frac{W}{m^2 \cdot ^\circ K^4} \right]$$

y, e es la emisividad propia de ciertos materiales. Representa la relación entre la radiación emitida por la superficie a una temperatura dada y, la radiación emitida por un cuerpo negro a la misma temperatura.

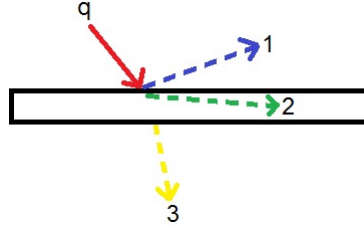


Figura 3: Esquema de radiación sobre un cuerpo.

En el proceso de radiación, pueden ocurrir tres posibilidades con la energía recibida por el cuerpo:

- (1) El cuerpo refleja parte de la energía con un coeficiente ρ :

$$\rho = \frac{\text{Radiacion Reflejada}}{\text{Radiacion Incidente}}$$

- (2) El cuerpo absorbe parte de la energía con un coeficiente α :

$$\alpha = \frac{\text{Radiacion Absorvida}}{\text{Radiacion Incidente}}$$

- (3) El cuerpo transmite parte de la energía con un coeficiente τ :

$$\tau = \frac{\text{Radiacion Transmitida}}{\text{Radiacion Incidente}}$$

Tanto ρ , α , $\tau \in (0, 1)$ y, además se cumple:

$$\rho + \alpha + \tau = 1$$

• **Factor de Visión:**

Sea F_{ij} la fracción de la radiación que sale de la superficie i y choca con la superficie j .

$$\Rightarrow Q_{ij} = A_i \cdot F_{ij} \cdot \sigma(T_i^4 - T_j^4)$$

F_{ij} se puede determinar a través de formulas y gráficos. También se cumple que:

$$\sum_{j=1}^n F_{ij} = 1$$

Lo cual quiere decir que, la suma de los factores de visión desde i a todas las superficies j , incluida ella misma, debe ser igual a 1.

Con esto, tenemos que para n superficies interactuando es necesario determinar $\frac{n(n-1)}{2}$ factores de visión.

Algunas propiedades son:

$$A_i \cdot F_{ij} = A_j \cdot F_{ji}$$

$$F_{i \rightarrow (j,k)} = F_{ik} + F_{ij}$$

$$\text{Si la superficie } i \text{ es plana} \Rightarrow F_{ii} = 0$$

Transferencia y Ecuación General de Energía

◦ **Ecuación General de Conducción del Calor:**

Si consideramos un volumen de control de lados Δx , Δy y Δz , al aplicar la primera ley de la Termodinamia tenemos que el cambio de energía interna, no es mas que la cantidad de energía que entra o sale de la frontera (analogamente al momentum).

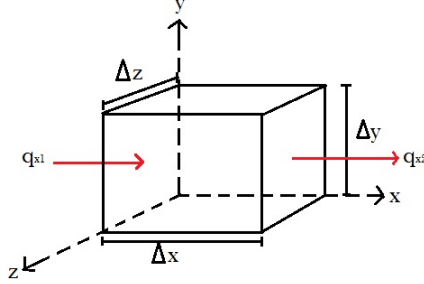


Figura 4: Volumen de Control.

Luego tenemos:

$$Q_{entrante} + W_{entrante} + E_{conversion} = Q_{saliente} + W_{saliente} + U_{interna}$$

En donde, $E_{conversion}$ representa energías provenientes de disipación eléctrica, roce (viscosidad), reacciones químicas ó de origen nuclear, en este caso la llamaremos \bar{q} . Por otro lado, si suponemos que ρ es constante, entonces el trabajo sobre el volumen de control se transforma en energía térmica. Entonces:

$$\Rightarrow q_{x_1} + q_{y_1} + q_{z_1} + \bar{q}\Delta x\Delta y\Delta z = q_{x_2} + q_{y_2} + q_{z_2} + \frac{\partial U}{\partial t}$$

Si agrupamos los terminos de a pares, por ejemplo:

$$q_{x_1} - q_{x_2} = -\Delta y\Delta z \left(\left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x_1} - \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x_2} \right)$$

Pero, κ puede depender de la temperatura y, por ende, de la geometría. Entonces, haciendo una expansión de Taylor:

$$\begin{aligned} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x_1} &= \kappa \frac{\partial T}{\partial x} + \left(\frac{-\Delta x}{2} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \dots \\ \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x_2} &= \kappa \frac{\partial T}{\partial x} + \left(\frac{\Delta x}{2} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \dots \\ \Rightarrow q_{x_1} - q_{x_2} &= \Delta y\Delta z \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \dots \right) \end{aligned}$$

Por analogia:

$$\begin{aligned} q_{y_1} - q_{y_2} &= \Delta x\Delta z \left(\Delta y \frac{\partial}{\partial y} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \dots \right) \\ q_{z_1} - q_{z_2} &= \Delta x\Delta y \left(\Delta z \frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dots \right) \end{aligned}$$

Así mismo:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \rho C_V (\Delta x \Delta y \Delta z) \frac{\partial T}{\partial t}$$

Para un fluido Newtoniano, $\rho = cte \Rightarrow C_V = C_P$.

Luego, agrupando los términos en la ecuación original:

$$\Delta y \Delta z \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right) \right) + \Delta x \Delta z \left(\Delta y \frac{\partial}{\partial y} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right) + \Delta x \Delta y \left(\Delta z \frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right) + \bar{q} = \rho C_V (\Delta x \Delta y \Delta z) \frac{\partial T}{\partial t}$$

y, dividiendo por el volumen de control $\Delta x \Delta y \Delta z$, se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \bar{q} = \rho C_V \frac{\partial T}{\partial t}$$

Que es la **ecuación general de la conducción**.

Ahora, en base a esta ecuación, se tienen los siguientes casos especiales:

- **Ecuación de Fourier:** Si κ es constante y, no hay conversión de energía interna, entonces:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\nabla^2 T = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

Donde α es el coeficiente de difusividad termica visto anteriormente.

- **Ecuación de Poisson:**

Si κ es constante, el sistema se encuentra en estado estacionario y, hay conversión energía interna, entonces:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\frac{\bar{q}}{\kappa}$$

$$\nabla^2 T = -\frac{\bar{q}}{\kappa}$$

- **Ecuación de Laplace:**

Si κ es constante, el sistema se encuentra en estado estacionario y, no hay conversión energía interna, entonces:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

$$\nabla^2 T = 0$$

- **Ecuación General de Energía:**

Realizando un balance de energía sobre un volumen de control estacionario $\Delta x \Delta y \Delta z$ parecido al visto anteriormente, pero esta vez considerando:

$$U_{e,i,c} = Q_{i,c,c} + Q_c + W_f$$

En donde, $U_{e,i,c}$ es la tasa de acumulación de energía interna y cinética en el volumen de control; $Q_{i,c,c}$ es la tasa neta de energía interna y cinética producto de la convección; Q_c es la tasa neta de calor producto de la conducción y; W_f es la tasa neta de trabajo realizado por el fluido.

Como es evidente, este balance de energía es mucho mas complejo, pero no así distinto que el anterior, ya que en esta oportunidad se considera la energía interna y cinética del sistema, acumulada y, producida

por convección. También, se considera la energía producida por conducción y, se considera el trabajo realizado por el fluido, el cual, representa fuerzas gravitacionales, fuerzas de presión y, fuerzas viscosas. Por lo tanto, la ecuación que representa este balance, conocida como **ecuación general de energía** es:

$$\rho C_V \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + I$$

$$I = 2\mu \left(\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right) + \mu \left(\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)^2 \right)$$

Donde, el término I puede ser relacionado con el calor generado por el sistema. Si el fluido se considera ideal ($\mu = 0$) $\Rightarrow I = 0$.

En terminos de la derivada material, tenemos:

$$\frac{DT}{Dt} = \alpha \nabla^2 T + \frac{I}{\rho C_P}$$

Recordar que para un fluido Newtoniano de densidad ρ constante, se cumple que $C_V = C_P$.

Como es de esperar, al igual que las ecuaciones de Navier-Stokes vistas anteriormente, ésta cumple un rol analogo para el caso de energía, cambiando la expresión al cambiar de geometría.

o **Conducción No Estacionaria:**

De la ecuación de conducción, se tiene la siguiente solución:

$$\frac{T(t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = e^{-bt}$$

Donde,

$$b = \frac{h \cdot A_s}{\rho \cdot V \cdot C_P}$$

T_∞ es la temperatura del fluido, T_i es la temperatura del cuerpo y, A_s es el área superficial. Esta ecuación permite determinar $T(t)$ y, es aplicable bajo ciertas condiciones.

Se define el largo característico como:

$$L_c = \frac{Area}{Perimetro}$$

y, el **número de Biot**:

$$Bi = \frac{Conveccion\ en\ la\ superficie}{Conduccion\ en\ el\ interior} = \frac{h \cdot L_c}{\kappa}$$

Notar que se parece a Nu , pero se diferencia en L_c .

La condición es:

$$Bi \leq 0,1$$

Cuando se cumple esta condición, el error en el resultado es del orden del 5%. Por otro lado, si no se cumple, no quiere decir que no se use, solo que el error asociado es mayor y, se utilizan tablas o gráficos para determinar estas características.

Se define el **número de Fourier**:

$$Fo = \frac{\text{Velocidad conducción cuerpo volumen } L^3}{\text{Velocidad almacenamiento cuerpo volumen } L^3} = \frac{\alpha \cdot t}{L^2}; \alpha = \frac{\kappa}{\rho C_P}$$

y, bajo este parámetro, se hacen análisis gráficos sumado al número de Biot.

- **Método Lump Capacitance:**

Se asume que la energía se distribuye uniformemente a través del sistema (No existe gradiente). Así, el sistema se trata como una sola entidad.

Se tiene la siguiente relación:

$$\rho V C_P \frac{\partial T(t)}{\partial t} = hA(T_\infty - T_s(t))$$

Integrando esta ecuación:

$$\begin{aligned} \int_{T_0}^T \frac{dT(t)}{(T(t) - T_\infty)} &= - \int_0^t \frac{hA}{\rho V C_P} dt \\ \Rightarrow \frac{T(t) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} &= e^{-\frac{hA}{\rho V C_P} t} = e^{-\frac{t}{\tau}} \end{aligned}$$

Donde:

$$\frac{t}{\tau} = Bi \cdot Fo$$

Para ver si el método es aplicable, vemos la razón entre resistencias internas y externas:

$$\begin{aligned} R_{superficie} &= (T_{int} - T_s) \\ R_{solido} &\approx \frac{\kappa(T_s - T_{centro})}{L} \\ \Rightarrow \frac{R_{superficie}}{R_{solido}} &= \frac{hL}{\kappa} = Bi \end{aligned}$$

Luego, aplicamos la condición vista anteriormente sobre el número de Biot.

- **Modelo Sólido Semi-infinito:**

Asume que la transferencia ocurre sólo cerca de la superficie, y no penetra todo el sistema. Es aplicable solo si t es pequeño o, el sistema es grande, lo que se traduce en un número de Fourier pequeño:

$$Fo \leq 0,1$$

Fo también puede usarse para saber cuanto calor ha sido transferido, según la temperatura a una distancia específica del sólido.

Supongamos que la distancia es x cuando el número de Fourier es $Fo = 0,1$, entonces el tiempo transcurrido será:

$$\begin{aligned} t &= \frac{0,1 \cdot x^2}{\alpha} \\ \Rightarrow x &= \sqrt{10 \cdot t \cdot \alpha} \end{aligned}$$

Que es la distancia a la cual ha llegado el proceso de calentamiento.

Para obtener el perfil de temperatura según este modelo, se resuelve la ecuación:

$$\frac{dT}{dt} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Imponiendo condiciones de borde. Pero, generalmente, se trabaja con una función complementaria de error, tal que:

$$\frac{T(x,t) - T_i}{T_s - T_i} = \operatorname{erfc}(\xi) = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi e^{-u^2} du$$

Donde, x es la distancia a la cual se encuentran los límites y, los valores de ξ y $\operatorname{erfc}(\xi)$ están tabulados.

Así:

- Si la temperatura es constante en la superficie (T_s) y, T_0 es la temperatura inicial, entonces:

$$T(x,t) = T_s + (T_0 - T_s) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}\right)$$

- Si hay dos sólidos en contacto y, $T_{A,0}$ y $T_{B,0}$ son las temperaturas iniciales en cada sólido, entonces:

$$T_s = \frac{(\kappa\rho C_P)_A^{1/2} T_{A,0} + (\kappa\rho C_P)_B^{1/2} T_{B,0}}{(\kappa\rho C_P)_A^{1/2} + (\kappa\rho C_P)_B^{1/2}}$$

- Si hay flujo constante de calor en la superficie:

$$T(x,t) = T_0 + \frac{q_0}{\kappa} \left[\sqrt{\frac{4\alpha t}{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha t}\right) + x \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4\alpha t}} - 1\right) \right]$$

- Si hay flujo de calor convectivo en la superficie (revisen esta formula!):

$$\frac{T(x) - T_0}{T_\infty - T_0} = 1 - \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}\right) - \exp\left(\frac{hx}{\kappa} + \frac{h^2\alpha t}{\kappa^2}\right) \left[1 - \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4\alpha t}} + \frac{h\sqrt{\alpha t}}{\kappa}\right) \right]$$

Para cuerpos con distintas geometrías, se multiplican las soluciones de la ecuación y, se procede del mismo modo visto hasta ahora, obteniendo:

$$T(x,y,z,t) = \theta(x,t) \times \theta(y,t) \times \theta(z,t)$$

$$T(r,\theta,z,t) = \psi(r,t) \times \psi(\theta,t) \times \psi(z,t)$$

Donde, cada función θ , ψ son obtenidas mediante gráficos que incluyen las geometrías de los cuerpos y, los números Bi y Fo .