Ingeniería de Minas
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

FENÓMENOS DE TRASPORTE EN METALURGIA EXTRACTIVA

Clase 04/06

Transporte de Calor

Prof. Leandro Voisin A, MSc., Dr.

Académico – Universidad de Chile.
Jefe del Laboratorio de Pirometalurgia.
Investigador Senior - Tohoku University, Japan.

Transporte de Calor
Condiciones de borde

- ✓ *Temperatura constante en la superficie*
- ✓ *Flujo de calor constante*
- ✓ *Interfase adiabática*
- ✓ *Dos Materiales en contacto*
- ✓ *Borde con transferencia por convección*

Temperatura constante de superficie

Es la condición de borde más simple, cuando se conoce la temperatura a lo largo de una superficie (o borde)

$$T\left(x = x_0, y, z\right) = T_0$$

Una extensión de esta condición es cuando la temperatura varía en forma conocida a lo largo de la superficie

Flujo de calor constante

Se conoce el flujo de calor a través de una superficie:

$$-k\,\frac{dT\left(x = x_0, y, z\right)}{dx} = q_0$$

Por ejemplo, si una fuente de calor genera una cantidad fija de calor por unidad de tiempo y está completamente encerrada por un sólido.

Flujo de un fluido a temperatura a través de un medio sólido, cañerías y otros.

Flujo de calor constante

Ejemplo 18

Distintos materiales se someten a la condición de flujo de calor constante en la interfase. Para cada uno se pide calcular el gradiente de temperatura en la superficie cuando el flujo de calor es de 10 kW/m².

Ejemplo 18, Solución:

Siendo el flujo constante, el gradiente de temperatura en la superficie está dado por:

$$-k\frac{dT\left(x=x_0,y,z\right)}{dx}=q_0$$

$$\frac{dT}{dx}=\frac{10000\,W/m^2}{k}$$

Flujo de calor constante

Gradiente de temperatura a un flujo de calor de 10 kW/m^2

Material	k[W/(m ºC)]	dT/dx [ºC/m]	dT/dx [ºC/mm]
Cu	388	25.8	0.026
Fe	62	161	0.16
Vidrio	1.2	8330	8.3
Madera	0.17	58800	58.8
Ladrillo	0.8	12500	12.5
Aislante	0.1	100000	100
Agua	0.62	16100	16.1
Aire	0.025	400000	400

Se observa que para tener un flujo de calor de 10 kW/m^2 a través de 1 mm de espesor de aire debe haber una diferencia de temperatura de 400 ºC , mientras que para cobre es de sólo 0.0258 ºC

Interfase adiabática

Si hay no flujo de calor (q = 0) a través de un borde, se denomina borde adiabático o simétrico:

$$\frac{dT(x = x_0, y, z)}{dx} = 0$$

Esta condición ocurre cuando la interfase está aislada adecuadamente y no hay intercambio de calor a través de ella. También ocurre en casos de simetría.

Interfase adiabática

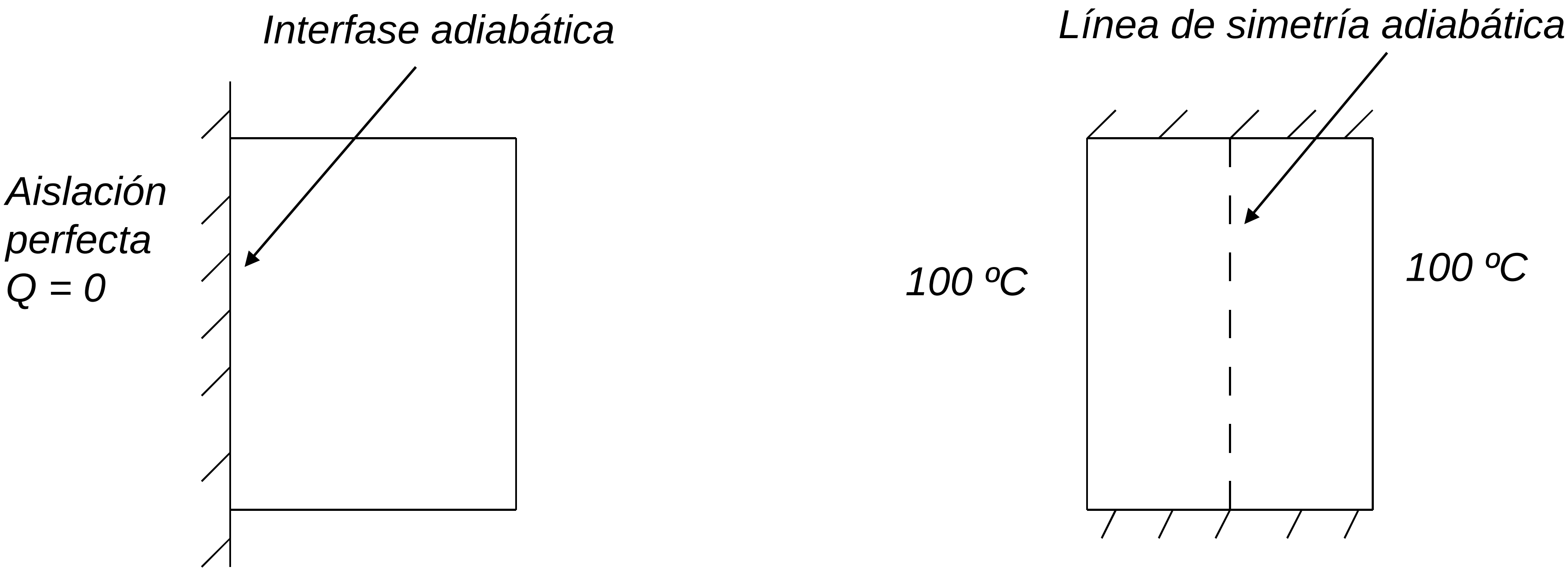


Ilustración de dos interfases adiabáticas comunes

Materiales en contacto

Cuando dos materiales se encuentran en contacto. Por ejemplo, una muralla hecha de capas de distintos materiales o un medio de transporte con capas de aislación múltiple.

$$q_I - k_I \frac{dT(x = x_0, y, z)}{dx} = -k_{II} \frac{dT(x = x_0, y, z)}{dx} = q_{II}$$

Dado que el calor no se puede acumular en la interfase (no tiene volumen ni masa), el flujo hacia la interfase desde un lado tiene que igualar al flujo desde la interfase hacia el otro lado de ésta. (Condición de continuidad)

Materiales en contacto

$$q_I - k_I \frac{dT(x = x_0, y, z)}{dx} = -k_{II} \frac{dT(x = x_0, y, z)}{dx} = q_{II}$$

donde k_I y k_{II} son las conductividades de cada material y las diferenciales representan el gradiente de temperatura a cada lado de la interfase.

Cuando no hay resistencia térmica entre los dos materiales, la temperatura en la interfase debe ser la misma:

$$T_{II}(x = x_0, y, z) = T_I(x = x_0, y, z)$$

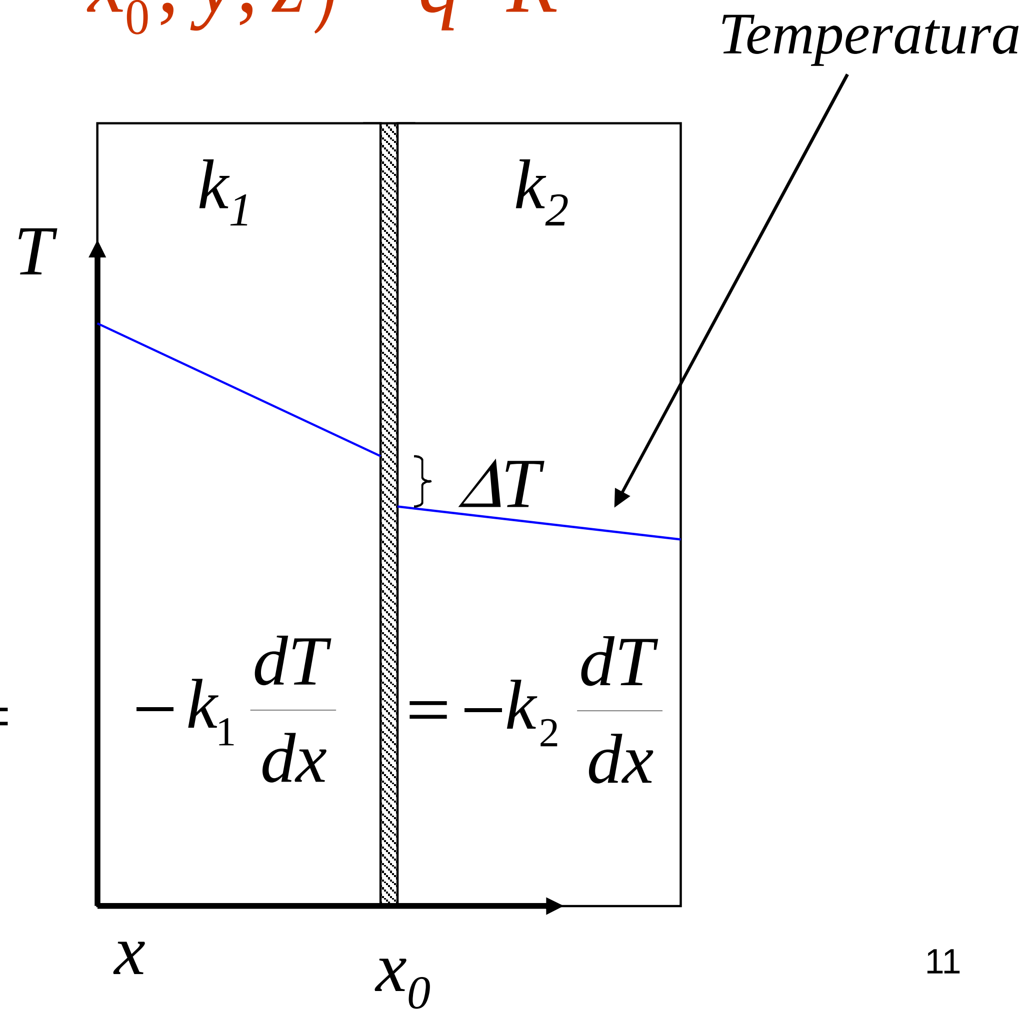
Materiales en contacto

Cuando el contacto es pobre, habrá una resistencia térmica R entre los dos materiales. La diferencia de temperatura será:

$$T_{II}\left(x=x_0,y,z\right)-T_I\left(x=x_0,y,z\right)=q\cdot R$$

q es el flujo de calor y R es la resistencia, usualmente expresada como 1/hR

$$\Delta T = q\cdot R = \frac{q}{h_R}$$



$$q = -k_1\frac{dT}{dx} = -k_2\frac{dT}{dx}$$

Materiales en contacto

Ejemplo 19

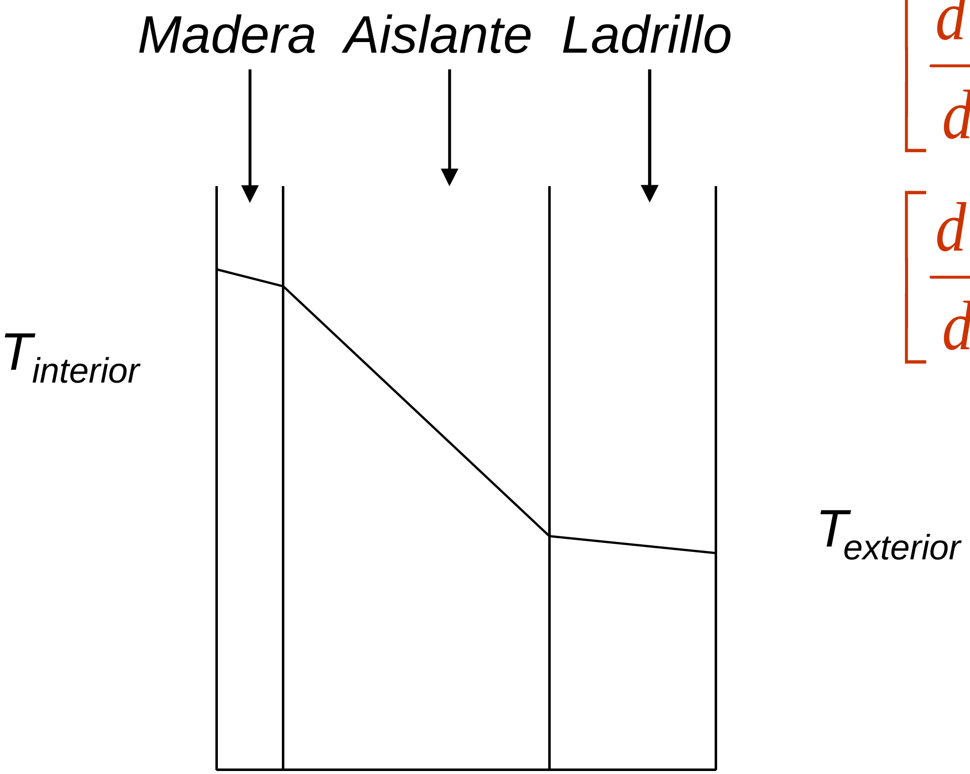
La muralla de una casa consiste de tres capas; madera, aislante y ladrillo. En estado estacionario, el gradiente de temperatura es de 1ºC/cm en la capa externa de ladrillo. Cuál es el gradiente de temperatura en la madera y en el aislante. Las conductividades son: madera: 0.16 W/mºC, ladrillo: 0.75 W/mºC, aislante: 0,09 W/mºC.

Ejemplo 19, Solución:

Es un problema de transferencia de calor en estado estacionario unidimensional donde el flujo de calor a través de cada capa es el mismo, entonces:

El aislante crea la mayor caída de temperatura por unidad de longitud.

Ejemplo 19, Solución:



$$\left[\frac{dT}{dx}\right]_{madera} = \frac{k_{ladrillo}}{k_{madera}}\left[\frac{dT}{dx}\right]_{ladrillo} = 4.7\,^{o}C$$

$$\left[\frac{dT}{dx}\right]_{aislante} = \frac{k_{ladrillo}}{k_{aislante}}\left[\frac{dT}{dx}\right]_{ladrillo} = 8.0\,^{o}C$$

Perfil de temperatura a través de una pared compuesta de una casa

Ejemplo 20

La pared de un horno industrial debe ser construida por ladrillos que tienen una dimensión estándar de 12 por 4.5 por 3 pulgadas.

Se encuentran disponibles dos clases de ladrillos A y B del mismo costo. El tipo A tiene un límite máximo de temperatura de 1900 ºF y una conductividad térmica de 1 Btu/h·ft·ºF, mientras que el B tiene una temperatura límite de 1600 ºF y una conductividad térmica de 0.5 Btu/h·ft·ºF.

¿Cuál es el diseño más económico para un horno de temperatura interior de 1900 ºF, una temperatura exterior de 400 ºF y un flujo de calor máximo permitido de 600 Btu/h·ft^2?.

Los ladrillos pueden ser dispuestos en cualquier configuración.

Ejemplo 20, Solución:

Ambos ladrillos tienen el mismo costo pero el tipo B tiene una conductividad térmica más baja.

Entonces para minimizar el espesor del ladrillo se debería trata de usar la mayor cantidad posible del tipo B.

No obstante, dado que la cara interior del horno se encuentra a 1900 ºF la primera capa tiene que ser del tipo A.

Ejemplo 20, Solución:

Como el ladrillo tipo B no puede ser calentado por sobre 1600 ºF, el espesor de la primera capa de ladrillo A tiene que ser suficiente para permitir un flujo de calor máximo de 600 Btu/h·ft^2.

La temperatura de la interfase de A con B debe ser igual ó menor a 1600 ºF.

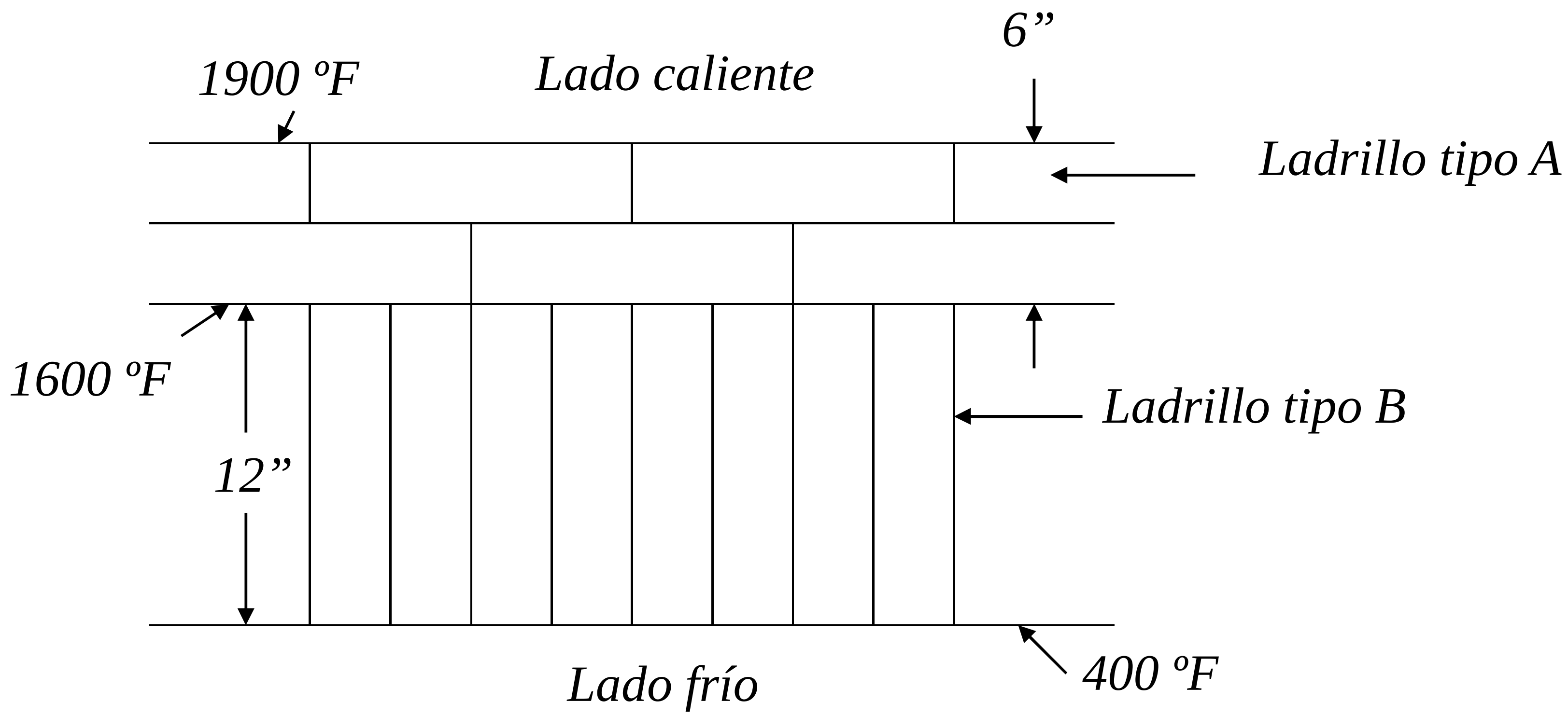
$$L_A = \frac{k_A\left(1900-1600\right)^o F}{q} = \frac{1 \cdot 300}{600}\ ft = \frac{1}{2}\ ft = 6''$$

Considerando que la diferencia de temperatura a través del ladrillo B es 1200 ºF (1600 – 400) el espesor de la capa de ladrillo B es:

$$L_B = \frac{k_B(1600-400)^o F}{q} = \frac{0.5 \cdot 1200}{600}\ ft = 1\ ft = 12''$$

Materiales en contacto

Diseño de pared con los dos tipos de ladrillos



Borde con transferencia por convección

Cuando una superficie es expuesta a transferencia de calor convectiva, la condición de borde es:

$$h\left(T_f - T\left(x = x_0, y, z\right)\right) = -k\,\frac{dT\left(x = x_0, y, z\right)}{dx}$$

Donde h es el coeficiente de transferencia de calor convectivo y T_f es la temperatura del seno del fluido.

Transferencia de Calor
a través de una serie de materiales

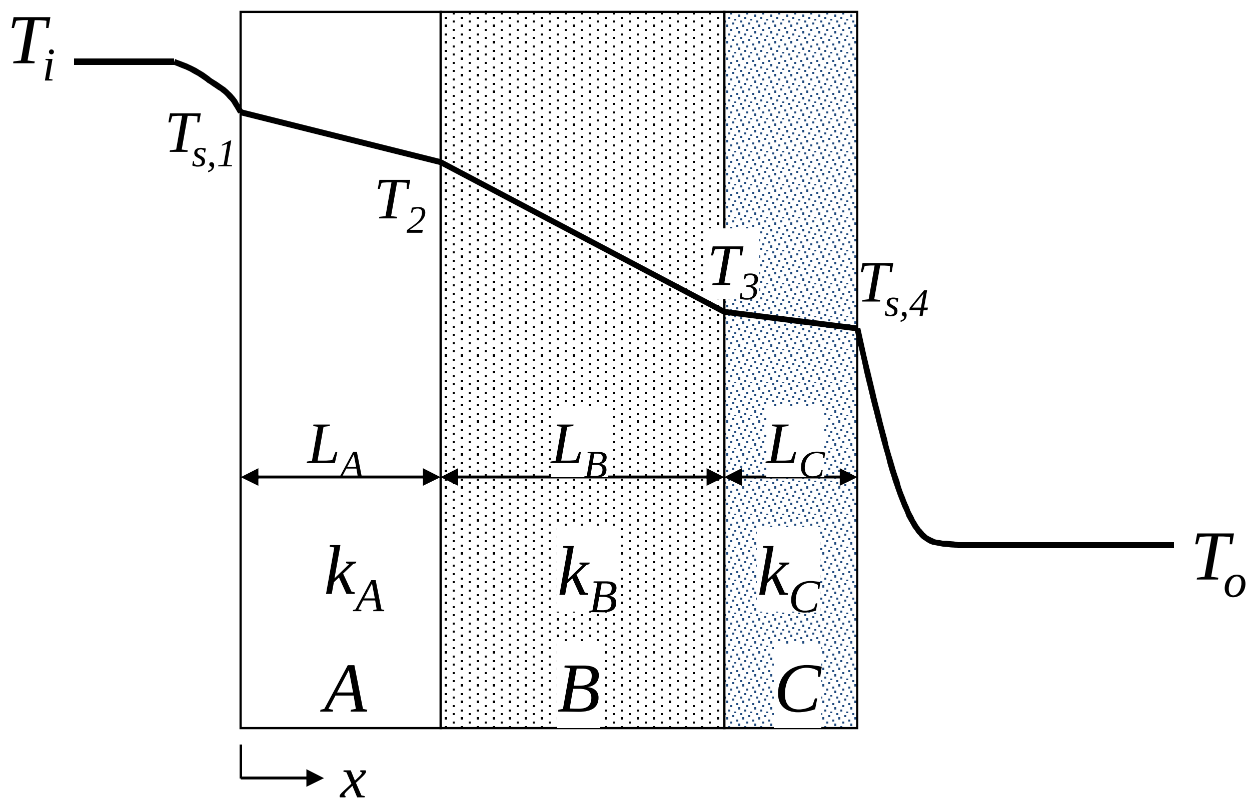
En el caso de transferencia de calor estacionaria en 1D a través de una muralla compuesta de varias capas. El flujo de calor a través de cada capa debe ser idéntico:

$$-k_i\left[\frac{dT}{dx}\right]_i = -k_j\left[\frac{dT}{dx}\right]_j = -k_k \ldots$$

Además, si no hay resistencia de contacto entre las capas, los materiales en contacto tendrán la misma temperatura en la interfases.

Transferencia de Calor a través de una serie de materiales

Gráficamente, se tiene la siguiente situación:



Ingeniería de Minas
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Transferencia de Calor a través de una serie de materiales

Considerando el ejemplo anterior (3 capas) con transferencia convectiva de calor en ambos lados:

$$q = h_i\left(T_i - T_1\right) = -k_A \frac{T_2 - T_1}{\Delta x_A} = -k_B \frac{T_3 - T_2}{\Delta x_B} = -k_C \frac{T_4 - T_3}{\Delta x_C} = h_o\left(T_4 - T_o\right)$$

A menudo, las únicas temperaturas que se miden son T_i y T_o. Reordenando la ecuación:

$$q = \frac{T_i - T_o}{\dfrac{1}{h_i} + \dfrac{\Delta x_A}{k_A} + \dfrac{\Delta x_B}{k_B} + \dfrac{\Delta x_C}{k_C} + \dfrac{1}{h_o}}$$

$$\text{Flujo de Calor} = \frac{\text{Fuerza motriz total}}{\text{Suma de Resistencias}} = \frac{\Delta T}{\sum R_i}$$

Transferencia de calor a través de una pared compuesta

Ejemplo 21

Para prevenir el empañado del vidrio trasero de los automóviles se adhiere un elemento calefactor con delgada película transparente que mantiene la temperatura sobre un valor predeterminado de 12 ºC.

Si se considera que el vidrio tiene un espesor de 4 mm con una conductividad térmica de 1.2 W/mºC, con coeficientes de transferencia de calor en el interior y exterior de 10 y 50 W/m^2 ºC, respectivamente, y si las temperaturas interior del auto y exterior (medio ambiente) son de 20 y -10ºC, respectivamente.

¿Qué potencia se requiere para prevenir el empañado del vidrio?

Ejemplo 21, Solución:

Se debe determinar la potencia para que la temperatura de la interfase aire/ventana se mantenga en o sobre los 12 ºC. Así en estado estacionario es un problema unidimensional donde el calor transportado a la ventana desde el aire interior más el calor generado en la película calefactora debe ser igual a las pérdidas de calor a través de la ventana.

$$\frac{(20-12)}{\frac{1}{10}}\left(\frac{W}{m^2}\right)+q\left(\frac{W}{m^2}\right)=\frac{12-(-10)}{\frac{0.004}{1.2}+\frac{1}{50}}\left(\frac{W}{m^2}\right)$$

$$\Rightarrow q=(943-80)\left(\frac{W}{m^2}\right)=864\left(\frac{W}{m^2}\right)$$

Transferencia de calor
a través de una pared compuesta

Ejemplo 22

Un horno esta construido desde el interior con un ladrillo de sílice (k = 1.1 W/mK) seguido por 5 cm de aislante (k = 0.2 W/mK) y una placa de acero de 1 cm de espesor (k = 43 W/mK).

La temperatura del gas dentro del horno es de 1000 ºC y el coeficiente de transferencia de calor de 20 W/m^{2}K). La pared exterior de acero esta a 30 ºC. El material de aislación tiene una temperatura de servicio de 800 ºC.

¿Cuál es el espesor mínimo requerido del ladrillo de sílice y cuál es el flujo de calor cuando se considera esta condición límite?

Ejemplo 22, Solución:

Primero se resuelve para el flujo de calor, considerando que la temperatura máxima del material de aislación es de 800 ºC.

$$q = \frac{(800-30)^{o}C}{\dfrac{0.05m}{0.2\dfrac{W}{m^{o}C}} + \dfrac{0.01m}{43\dfrac{W}{m^{o}C}}} = 3080\frac{W}{m^{2}}$$

Ya que el flujo de calor de cada parte de la pared tiene que ser el mismo, el espesor del ladrillo se puede calcular combinando las ecuaciones de Fourier y continuidad.

Transferencia de calor a través de una pared compuesta

Ejemplo 22, Solución:

$$q = 3080\,\frac{W}{m^2} = \frac{(1000-800)^{o}\,C}{\dfrac{1}{20\,\dfrac{W}{m^2\,{}^oC}} + \dfrac{x\,m}{1.1\,\dfrac{W}{m^2\,{}^oC}}}$$

$$\Rightarrow x = \left(\frac{200}{3080} - \frac{1}{20}\right)\cdot 1.1\,m$$

$$\Rightarrow x = 1.64\,cm$$

Tasa de Resistencia

La industria de la construcción define un valor R conocida como tasa de resistencia para describir las propiedades térmicas aislantes de los materiales.

En el sistema SI, R presenta las unidades:

$$R = \frac{Espesor(\,pu\ell gadas\,)}{k(\dfrac{Btu \cdot pu\ell g}{h \cdot ft^2 \cdot {}^o F})} = \frac{L}{k}$$

Para un ΔT dado, el flujo de calor por área unitaria esta dado por:

$$q(\frac{Btu}{h \cdot ft^2}) = \frac{\Delta T(^o F)}{R} (= k\frac{\Delta T}{L})$$

Valores típicos de R

Capas típicas constituyentes de una pared habitacional	Espesor (“)	k (Btu“/h·ft^2·ºF)	R (h·ft^2·ºF/Btu)
Película de aire exterior			0.17
Ladrillo	4	10	0.4
Espacio de aire	3/4		0.94
Contraenchapado	1/2	0.81	0.62
Aislación	3 1/2	0.32	11.0
Capa de yeso	1/2	1.1	0.45
Película de aire interior			0.48
Total	9 1/4		14.26

Valores típicos de R

Ejemplo 23

Determinar las pérdidas de calor a través de una pared de 200 ft² como la descrita en la tabla anterior, cuando la temperaturas interior y exterior son de 75 y 5 ºF, respectivamente.

Ejemplo 23, Solución:

En este caso asumimos transferencia de calor unidimensional en estado estacionario con un área seccional constante. Así el flujo de calor a través de cada capa es el mismo e igual para el flujo de calor total:

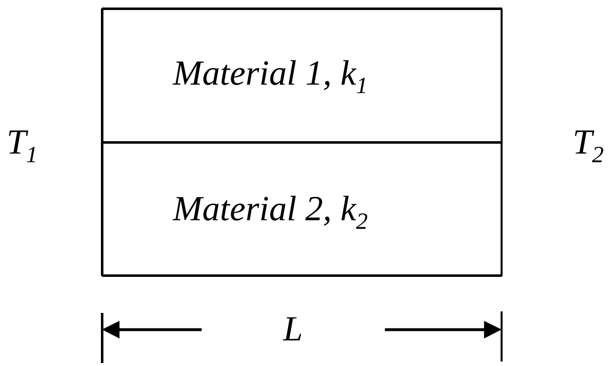
$$q = A\frac{\Delta T_i}{\sum R_i} = A\frac{\Delta T}{R} = 200\ ft^2\ \frac{(75-5)^o\ F}{14.26\ \dfrac{h\ ft^{2\,o}\ F}{Btu}} = 982\frac{Btu}{h} = 288\ W$$

Flujo de calor en paralelo

En alguno casos el calor es transportado en paralelo por dos ó mas materiales.

Cuando las conductividades térmicas son similares se pueden aplicar analogías eléctricas.

Siendo el flujo de calor a través de cada material diferente, el flujo de calor se puede describir como una serie de flujos.



donde: A_1 y A_2 son las áreas seccionales, k_1 y k_2 las conductividades térmicas de los dos materiales y ΔT la diferencia de temperatura entre ambos lados

$$q \approx (k_1 A_1 + k_2 A_2)\frac{\Delta T}{L}$$

Conducción de calor en coordenadas cilíndricas

Las componentes en un sistema de coordenadas cilíndricas son: i) el radio r, ii) el ángulo ϕ, y iii) la altura z.

En algunos casos nos interesa determinar la temperatura en un alambre debido al paso de la corriente, por lo que se debe incluir el término de generación de calor, para el balance de energía.

Así, la ecuación de conducción de calor en estado estacionario en un sistema de coordenadas cilíndricas es:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+\frac{q_{gen}}{k}=0$$

Conducción de calor en coordenadas cilíndricas

En muchas situaciones prácticas, $q_{gen} = dT/dz = dT/d\phi = 0$, es decir, sólo nos interesa el flujo de calor radial.

Si consideramos la transferencia de calor a través de la pared de una cañería, con radios exterior e interior r_2 y r_1, temperaturas interior y exterior T_1 y T_2, respectivamente y con una conductividad térmica k:

El flujo de calor para una longitud L de cañería queda determinado por la ecuación:

$$q(W) = -kA\frac{dT}{dr} = -k(2 \cdot \pi \cdot r \cdot L)\frac{dT}{dr}$$

Conducción de calor en coordenadas cilíndricas

El flujo de calor es constante, pero el área varía en función del radio. Así el gradiente de temperatura disminuye en la medida que aumenta el radio del cilindro ó de la cañería.

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{q}{2\pi L}\frac{dr}{r} = \int_{T_1}^{T_2} (-k)dT$$

$$q(W) = (2\pi kL)\frac{T_1 - T_2}{ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)}$$

Conducción de calor en coordenadas cilíndricas

Al fijar ΔT, el flujo de calor de la cañería para una longitud dada, depende de la razón del radio exterior al radio interior, y no de los valores absolutos.

$$\frac{Area\,Cañería}{Radio} = \frac{(2\pi r)L}{r} = 2\pi L$$

Esto significa que una cañería con un diámetro exterior e interior de 2 y 1 pulgadas, tiene el mismo flujo de calor que una cañería con un diámetro de 2 y 1 m, respectivamente. La razón, es que el área seccional sobre el radio es constante.

$$q_1 = \frac{q_2 \cdot r_2}{r_1}$$

Conducción de calor en coordenadas cilíndricas

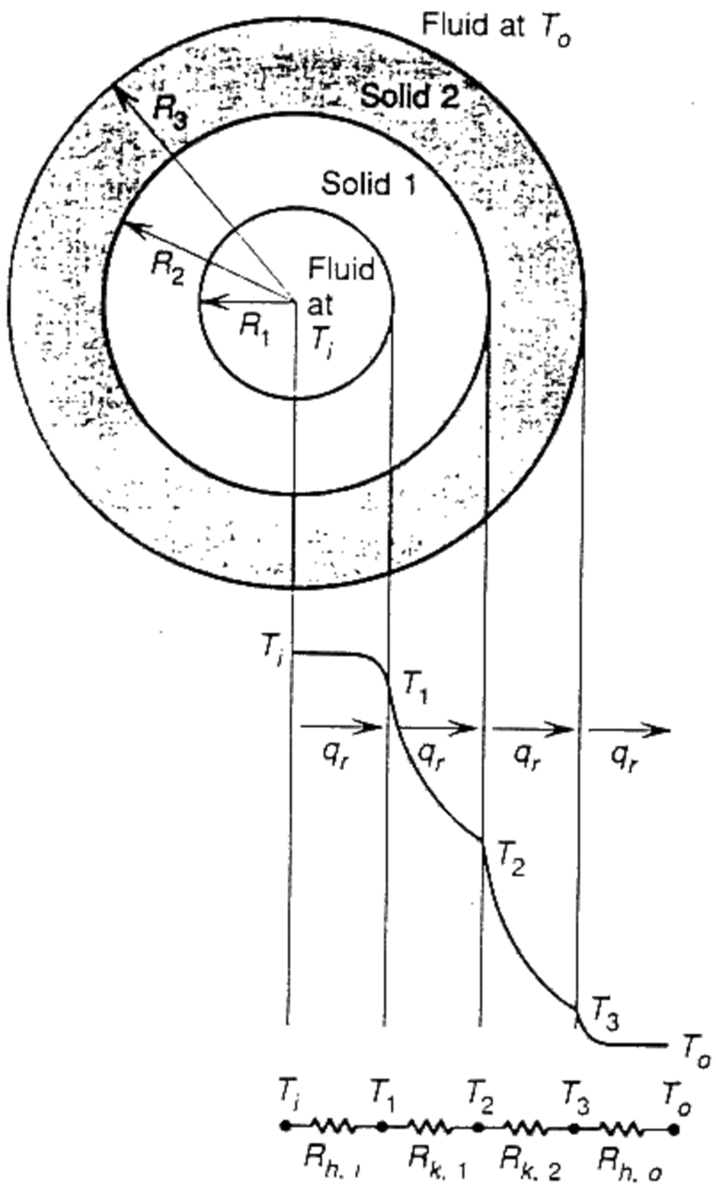
Por otro lado el flujo de calor por unidad de área (W/m^2) disminuye a medida que el radio de la cañería aumenta.

Dentro de la pared de la cañería la temperatura esta dada por:

$$T(r) = \frac{T_1 - T_2}{ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)} \cdot ln\left(\frac{r}{r_2}\right) + T_2$$

T_1 es la temperatura en el radio r_1 y T_2 la temperatura en el radio r_2.

Conducción de calor en coordenadas cilíndricas
Pared compuesta con diferentes materiales



Conducción de calor en coordenadas cilíndricas
Pared compuesta con diferentes materiales

En el caso de la pared compuesta por dos materiales diferentes en que el flujo de calor a través de cada capa es el mismo, la ecuación resultante es:

$$q = (2\pi L)\frac{T_1 - T_2}{\dfrac{\ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)}{k_A}} = (2\pi L)\frac{T_2 - T_3}{\dfrac{\ln\left(\dfrac{r_3}{r_2}\right)}{k_B}}$$

Conducción de calor en coordenadas cilíndricas
Pared compuesta con diferentes materiales

donde r_1 es el radio interior, r_2 es el radio de la interfase entre los dos materiales y r_3 es el radio exterior. T_1, T_2 y T_3 son las correspondientes temperaturas y k_A y k_B son las respectivas conductividades térmicas. Reordenando la ecuación anterior se obtiene:

$$\frac{T_1 - T_2}{\frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{k_A}} = \frac{T_2 - T_3}{\frac{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{k_B}}$$

Conducción de calor en coordenadas cilíndricas
Pared compuesta con diferentes materiales

En la interfase la temperatura T_2 es:

$$T_2 = \frac{\dfrac{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{k_B} \cdot T_1 + \dfrac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{k_A} \cdot T_3}{\dfrac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{k_A} + \dfrac{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{k_B}}$$

Despejando T_2 y re insertando en la ecuación del flujo de calor se obtiene:

$$q = \frac{(2\pi L)\cdot(T_1 - T_2)}{\dfrac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{k_A} + \dfrac{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{k_B}}$$

Se debe notar que con más capas se deben agregar más términos de resistencia.

Conducción de calor en coordenadas cilíndricas
Pared compuesta con diferentes materiales

En situaciones donde en lugar de tener temperaturas conocidas en la superficie interior y exterior de un tubo tenemos transferencia de calor convectivo, la ecuación de flujo de calor se transforma en:

$$q(W) = \frac{(2\pi L)\cdot(T_i - T_0)}{\dfrac{1}{r_1 h_1} + \dfrac{ln(\frac{r_2}{r_1})}{k_A} + \dfrac{ln(\frac{r_3}{r_2})}{k_B} + \dfrac{1}{r_3 h_3}}$$

donde h_1 y h_3 son los coeficientes de transferencia de calor en las superficies interna y externa, y T_i y T_o las temperaturas de los fluidos interior y exterior, respectivamente.

Conducción de calor en coordenadas cilíndricas
Pared compuesta con diferentes materiales

Ejemplo 24

Vapor de agua es transportado por una cañería de acero inoxidable con radios interior y exterior de 1 y 2 pulgadas, respectivamente. Para reducir las pérdidas de calor la cañería es recubierta con una capa de 1 pulgada de aislante.

La temperatura de la pared interior de la cañería de acero es de 500 ºC, la temperatura del aire exterior de 20 ºC y el coeficiente de transferencia de calor exterior de 15 W/m^2 ºC. La conductividades térmicas del acero y aislante son de 22 y 0.25 W/mºC respectivamente. Calcular:

Las pérdidas de calor por metro de longitud de cañería, y

La temperatura en la interfase entre el acero y el material aislante

Conducción de calor en coordenadas cilíndricas
Pared compuesta con diferentes materiales

Ejemplo 24, Solución:

a) El radio exterior del aislante es de 3 pulgadas ó 0.0762 m. El flujo de calor es:

$$q = \frac{(2\pi L)\cdot(500-20)}{\frac{\ln(\frac{0.0508}{0.0254})}{22} + \frac{\ln(\frac{0.0762}{0.0508})}{0.25} + \frac{1}{0.0762\cdot 15}} W = 1.190\, W$$

b) La temperatura en la interfase puede ser encontrada resolviendo para T_2

$$q = 1.190 W = \frac{(2\pi)(500-T_2)}{\frac{\ln(\frac{0.0508}{0.0254})}{22}} \Rightarrow T_2 = 493.9^{o}\, C$$