Ingeniería de Minas
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

FENÓMENOS DE TRASPORTE EN METALURGIA EXTRACTIVA

Clase 05/06
Transporte de Calor

Prof. Leandro Voisin A, MSc., Dr.

Académico – Universidad de Chile.
Jefe del Laboratorio de Pirometalurgia.
Investigador Senior - Tohoku University, Japan.

Aislación de cañerías

Para disminuir las pérdidas de calor es común aumentar el espesor del aislante.

En el caso de una placa plana las pérdidas de calor disminuyen a medida que aumenta el espesor, pero no es claro en el caso de las cañerías.

Considerando sólo el espesor del aislante (radio) como variable, con todo lo demás fijo, el flujo de calor es:

$$q = \frac{A_1}{A_2 + \frac{\ln(r_3)}{k_{aisl}} + \frac{1}{r_3 h_3}}$$

Aislación de cañerías

$$q = \frac{A_1}{A_2 + \dfrac{\ln(r_3)}{k_{aisl}} + \dfrac{1}{r_3 h_3}}$$

donde:

A_1 y A_2 son constantes. Respecto al radio r_3 en la medida que aumenta, también aumenta la resistencia por difusión térmica mientras que la resistencia por el calor convectivo disminuye.

Para encontrar el radio en el cual el flujo de calor tiene su máximo valor, la derivada respecto a r_3 tiene que ser cero.

Aislación de cañerías

$$\frac{dq}{dr_3} = \frac{d}{dr_3}\left(\frac{A_1}{A_2 + \frac{ln(r_3)}{k_{aisl}} + \frac{1}{r_3 h_3}} \right) = 0$$

Aplicando la siguiente aproximación:

$$\frac{d}{dx}(f(x)) = \frac{d}{du}(f(u))x\frac{du}{dx}; u = \left(A_2 + \frac{ln(r_3)}{k_{aisl}} + \frac{1}{r_3 h_3}\right)^{-1}$$

Se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{1}{k_{aisl} r_3} - \frac{1}{r_3^2 h_3} = 0 \quad \Rightarrow r_3 = \frac{k_{aisl}}{h_3}$$

Aislación de cañerías

Si se agrega aislante menor que la razón k_{aisl}/h_3 el flujo de calor aumentará. Si es mayor que este valor disminuirán las pérdidas de calor.

Ya que k_{aisl} es típicamente 0.05 W/mºC y el coeficiente de calor del aire es cerca de 5 W/m²ºC, el radio crítico es cerca de 1.0 cm.

Si se agrega aislante a una cañería con diámetros inferiores a 1 cm pueden aumentar las pérdidas de calor.

Conducción de Calor en una esfera

En el caso de esferas sólo nos interesa cuando el gradiente de temperatura se desarrolla radialmente.

Consideremos la transferencia de calor a través de la pared de una esfera con un radio exterior r_2 *y un radio interior* r_1*. la temperatura exterior es* T_2 *y la temperatura interior* T_1*, y la conductividad k.*

El flujo de calor es:

$$q = -kA\frac{dT}{dr} = -k(4\pi r^2)\frac{dT}{dr}$$

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{q}{4\pi}\frac{dr}{r^2} = \int_{T_1}^{T_2} (-k)\,dT$$

Ingeniería de Minas
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Conducción de Calor en una esfera

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{q}{4\pi}\frac{dr}{r^2} = \int_{T_1}^{T_2} (-k)\,dT$$

$$q(W) = (4\pi)\frac{k(T_2 - T_1)}{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}}$$

Una esfera presenta la menor área superficial externa respecto al volumen, comparada con cualquier otra configuración geométrica por lo que esferas vacías (huecas) se utilizan para minimizar las pérdidas de calor en sistemas.

Conducción de calor de varias geometrías

Geometría	Flujo de calor (W/m^2)	Flujo de calor para esfera o cilindro con pared delgada ($\Delta R << R$)
Placa plana Espesor (Δx)	$q = \dfrac{T_1 - T_2}{\dfrac{\Delta x}{k}}$	
Cilindro (R_1, R_2) Flujo de calor por superficie interior	$q = \dfrac{T_1 - T_2}{\dfrac{R_1}{k} \ln \dfrac{R_2}{R_1}}$	$q \approx \dfrac{T_1 - T_2}{\dfrac{\Delta R}{k}}$
Esfera (R_1, R_2) Flujo de calor por superficie interior	$q = \dfrac{T_1 - T_2}{\dfrac{R_2 - R_1}{k} \dfrac{R_1}{R_2}}$	$q \approx \dfrac{T_1 - T_2}{\dfrac{\Delta R}{k}}$

Transferencia de calor difusivo en estado estacionario (placas, cilindros y esferas)

Conducción de calor de varias geometrías

Para estimar las pérdidas de calor de paralelepípedos que tienen una pequeña cavidad rodeada por una delgada pared tal como un horno rodeado por un aislante delgado, se puede usar la siguiente ecuación:

$$q \approx 0.725\sqrt{A_{ext} \cdot A_{int}}\,\frac{k(T_{int} - T_{ext})}{w}$$

donde, A_{ext} y A_{int} son las áreas superficiales externa e interna, y w el espesor de la pared. Para este tipo de geometría el flujo de calor no es estrictamente unidimensional en particular en las esquinas.

No obstante, cuando la cavidad es cercana a un cubo y las paredes son delgadas con una razón $A_{ext}/A_{int} > 2$ esta ecuación es bastante precisa.

Conducción de calor de varias geometrías

Ejemplo 25

La cámara interior de un horno eléctrico es de 6 x 8 x 12 pulgadas, y con 6 pulgadas de pared (espesor) hecha con un refractario de conductividad térmica de 0.2 Btu/h ft ºF.

Si el interior del horno es mantenido a 2000 ºF mientras la temperatura exterior es de 300 ºF ¿Cuál es la potencia requerida de este horno para que opere en estado estacionario?

Ejemplo 25, Solución:

El área superficial interior del horno es 3 ft^2 *y el área superficial exterior 17.7 ft*^{2}*. Ya que* A_{ext}/A_{int} *es mucho mayor a 2, se tiene que:*

$$q = 0.725\sqrt{3 \cdot 17.7}\,\frac{0.2(2000-300)}{0.5} = 3600\,\frac{Btu}{h} = 1.05\ kW$$

Aproximación del método de capacitancia de masa en estado estacionario

- *En los casos en donde el calor es generado en un alambre eléctrico cubierto con un aislante es posible tratar éste como si la temperatura fuera uniforme. En estado estacionario la energía generada dentro del alambre tiene que ser igual a la difusión térmica a través del aislante.*

- *Si consideramos un alambre de radio r_1 donde se genera energía a una tasa igual a $q_{gen}(W/m^3)$ con un aislante plástico de espesor δ y conductividad k_{aisl}, un coeficiente de transferencia de calor h y temperatura del fluido T_∞. Para conocer la temperatura dentro del alambre T_{alam} se debe efectuar un balance de energía.*

Aproximación del método de capacitancia de masa en estado estacionario

- *Una cantidad fija de energía se libera en el alambre por unidad de longitud y unidad de tiempo, siendo un flujo de calor constante en la condición de borde de la interface entre el alambre y el plástico:*

$$q(W) = V * q_{gen} = (\pi\ r_1^2\ L) * q_{gen}$$

El radio externo del aislante es $r_1+\delta$*, así:*

$$q = (\pi\ r_1^2\ L) \cdot q_{gen} = \frac{(2\pi L)(T_{alam} - T_\infty)}{\left(\frac{\ln(\frac{r_1+\delta}{r_1})}{k_{aisl}} + \frac{1}{(r_1+\delta)h} \right)}$$

Aproximación del método de capacitancia de masa en estado estacionario

Resolviendo para T_{alam}:

$$T_{alam} = T_{\infty} + \frac{r_1^2 q_{gen}}{2}\left[\frac{\ln\left(\frac{r_1+\delta}{r_1}\right)}{k_{ais}} + \frac{1}{(r_1+\delta)h}\right]$$

- *Para el caso de alambre sin aislante:*

$$T_{alam} = T_{\infty} + \frac{r_1^2 q_{gen}}{2h}$$

Esta es una buena aproximación cuando la tasa de conducción de calor dentro del alambre es más alta que a través de la película de aire.

Aproximación del método de capacitancia de masa en estado estacionario

- *Esta tasa relativa de transferencia de calor puede ser comparada usando el número de Biot (Bi).*

$$Bi = \frac{h \cdot V}{k \cdot A} \Rightarrow \quad cilindro: Bi = \frac{h \cdot R}{2k}$$

- *El método de capacitancia de masa es una buena aproximación para números de Biot menores que 0.1.*

Aproximación del método de capacitancia de masa en estado estacionario

Ejemplo 26

¿Cuál es la máxima corriente a través de un alambre de cobre de 1 mm de ϕ con una aislación de 1 mm de espesor que puede resistir temperaturas de hasta 90 ºC?. Considere: T_{amb} = 20 ºC, k_{aisl} = 0.35 W/mºC, h = 8 W/m²ºC y resistividad eléctrica del cobre, o = 1.96·10⁻⁸ Ω·m.

Ejemplo 26, Solución:

La tasa de generación de energía por el paso de la corriente esta dada por:

$$q(W) = R \cdot I^2 = \frac{o\,L}{\pi\,r_1^2} I^2 = \frac{(2\pi L)(T_{alam} - T_{amb})}{\dfrac{\ln\left(\dfrac{r_1+\delta}{r_1}\right)}{k_{aisl}} + \dfrac{1}{(r_1+\delta)h}}$$

Aproximación del método de capacitancia de masa en estado estacionario

Ejemplo 26, Solución:

Despejando para I (Amp):

$$I = \sqrt{\frac{(2\pi^2 r_1^2)(T_{alam} - T_{amb})}{\left(\frac{\ln(\frac{r_1+\delta}{r_1})}{k_{aisl}} + \frac{1}{(r_1+\delta)h}\right)\cdot o}}$$

Reemplazando los valores del enunciado:

$$I = \sqrt{\frac{0.000345}{(3.139 + 83.33)1.96 \cdot 10^{-8}}} = 14.3 \ Amp$$

Transferencia de Calor Transiente v/s Estacionaria

- *Luego de iniciar un proceso o al hacer un cambio en éste, habrá un período de tiempo antes de alcanzar el estado estacionario.*

- *En algunas situaciones, el estado estacionario nunca es alcanzado.*

- *En otras, el estado estacionario se alcanza muy rápidamente.*

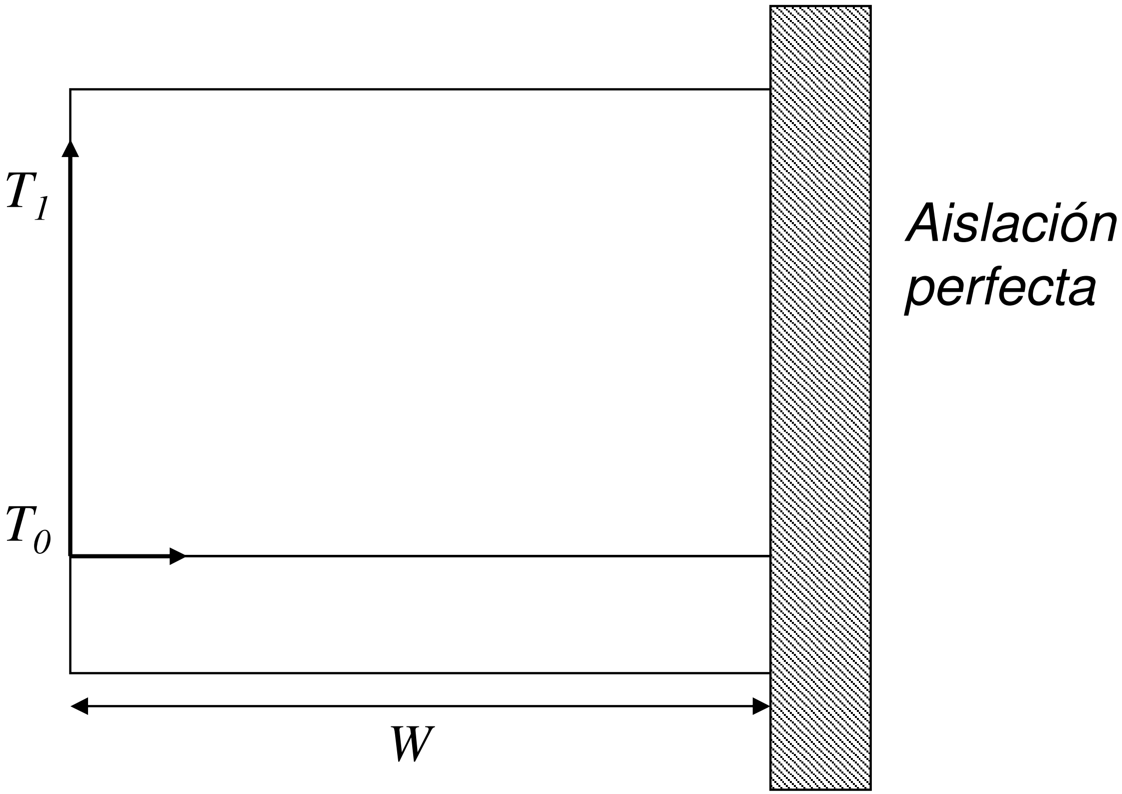
- *El objetivo de esta sección es encontrar algunas relaciones que permitan determinar aproximadamente cuánto tiempo tardará en alcanzarse el estado estacionario*

Número de Fourier

Consideremos la siguiente situación:

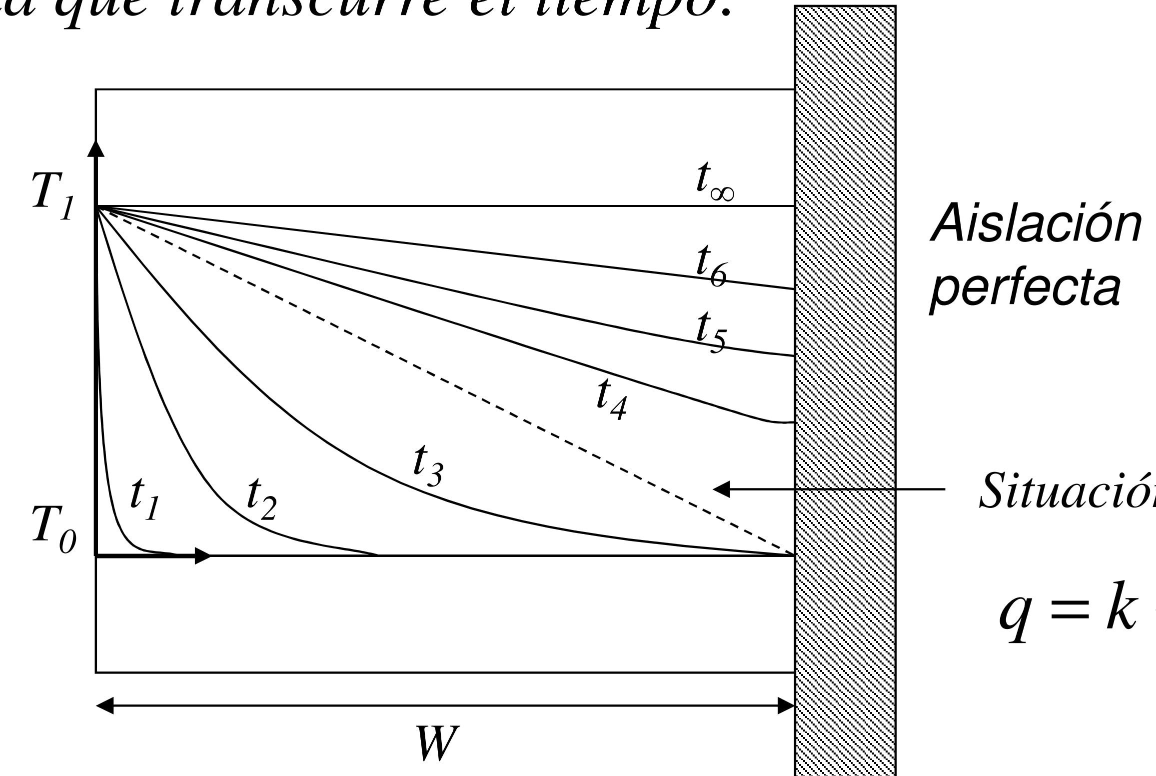
Sistema de ancho W, Área A (perpendicular), Temperatura inicial uniforme T_0. El sistema se encuentra aislado a la profundidad W

La Temperatura de la superficie aumenta a T_1 en t=0



Número de Fourier

A medida que transcurre el tiempo:



Situación hipotética

$$q = k \cdot \frac{T_1 - T_0}{W}$$

Supongamos que el flujo de calor "promedio" desde que se impuso la temperatura T_1 hacia el sistema está dado por:

$$Q[\mathrm{W}] = k \cdot A \cdot \frac{T_1 - T_0}{W}$$

Número de Fourier

Una vez que la temperatura en el extremo W ha alcanzado la temperatura T_1 → régimen estacionario, la cantidad total de calor ingresada al sistema debe ser:

$$\Delta H[\mathrm{J}] = m[\mathrm{kg}] \cdot c_p \left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{K}}\right] (T_1 - T_0)[\mathrm{K}]$$

$$\Delta H[\mathrm{J}] = c_p \cdot \rho \cdot A \cdot W \cdot (T_1 - T_0)$$

La cantidad de energía ingresada debe igualar al flujo de calor por el tiempo necesario para lograr estado estacionario:

$$k \cdot A \cdot \frac{T_1 - T_0}{W} \cdot t = c_p \cdot \rho \cdot A \cdot W \cdot (T_1 - T_0)$$

Número de Fourier

Por lo tanto, para el flujo de calor hipotético, el tiempo correspondiente en alcanzar el estado final será:

$$t = \frac{c_p \cdot \rho}{k} \cdot W^2 = \frac{W^2}{\alpha}$$

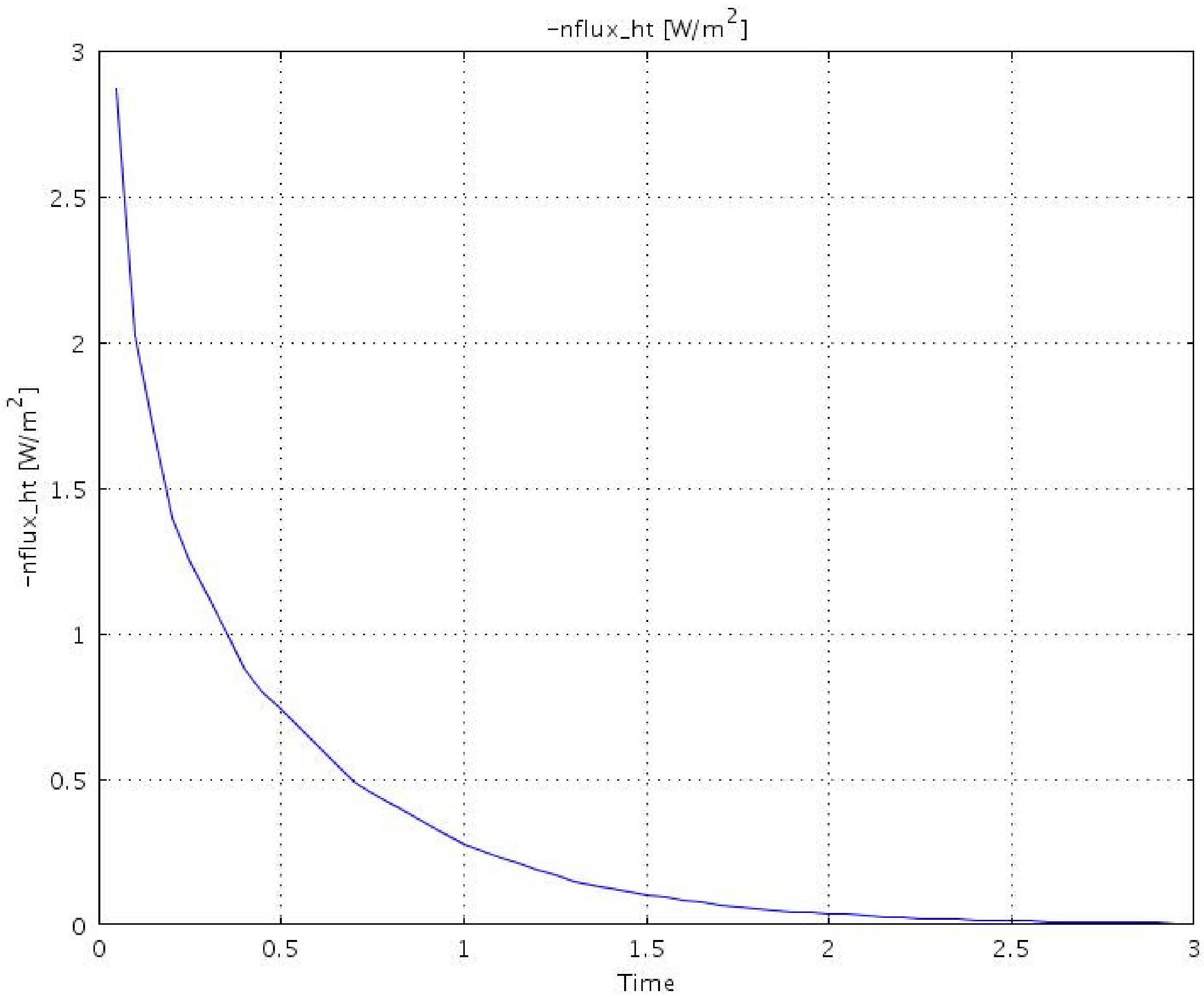
$$\Rightarrow \; Fo = \frac{\alpha\, t}{W^2} = 1$$

Siendo Fo el número adimensional de Fourier

Si Fo aumenta, significa que el estado estacionario se acerca.

Si Fo < 1, el proceso de difusión sólo acaba de comenzar y no se ha alcanzado estado estacionario.

El estado estacionario se logrará si el flujo de calor a través del sistema es constante, en el caso del ejemplo anterior debe ser = 0.



Flujo de calor en el tiempo a través de superficie en x=0

$k = 1\ W/(m\ K)$

$W = 1\ m$

$r = 1\ kg/m^3$

$c_p = 1\ J/(kg\ K)$

$Fo = ?$

Número de Fourier

En realidad, para el caso descrito anteriormente, se ha establecido que el estado estacionario se logra cuando, Fo > 2.

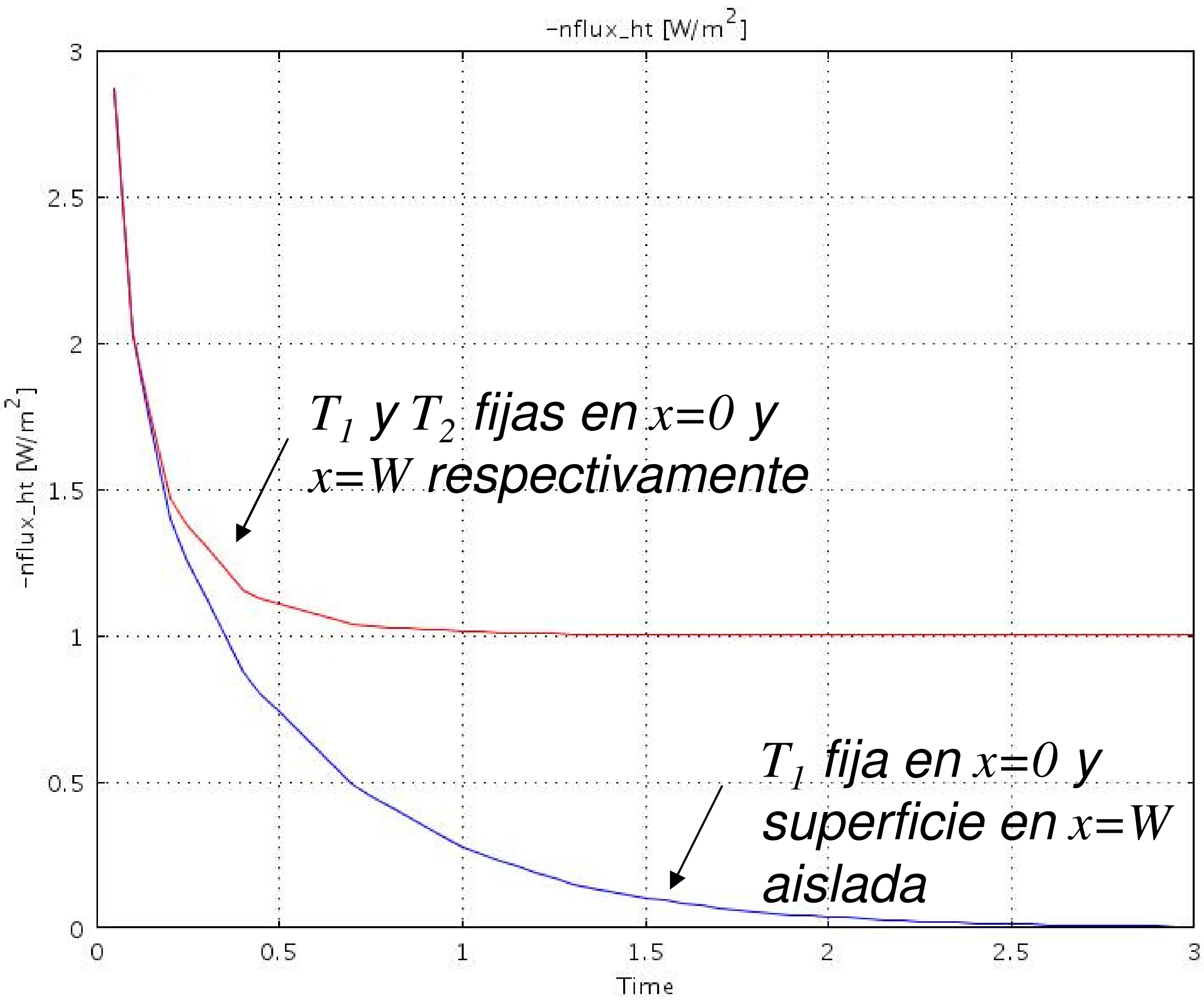
Esta situación también es aplicable a una placa de ancho 2W y temperatura inicial T_0 *cuando la temperatura de ambas caras se cambia repentinamente a* T_1.

Si la temperatura se mantiene fija en ambos extremos, es decir $T=T_1$ *en* $x=0$ *y* $T=T_0$ *en* $x=W$. *El flujo de calor en estado estacionario será:*

$$q = k\frac{T_1 - T_0}{W} > 0, \quad T_1 > T_0$$

Caso con dos temperaturas fijas

El flujo de calor en función del tiempo en x=0 será:



Caso con convección en una superficie

Supongamos que la temperatura inicial es T_0, en $x=0$ se impone $T=T_1$ fija para $t>0$ y la superficie en $x=W$ está expuesta a convección con un coeficiente de transferencia de calor h y temperatura ambiente igual a T_0.

En estado estacionario y respecto a los casos anteriores que tendremos?:

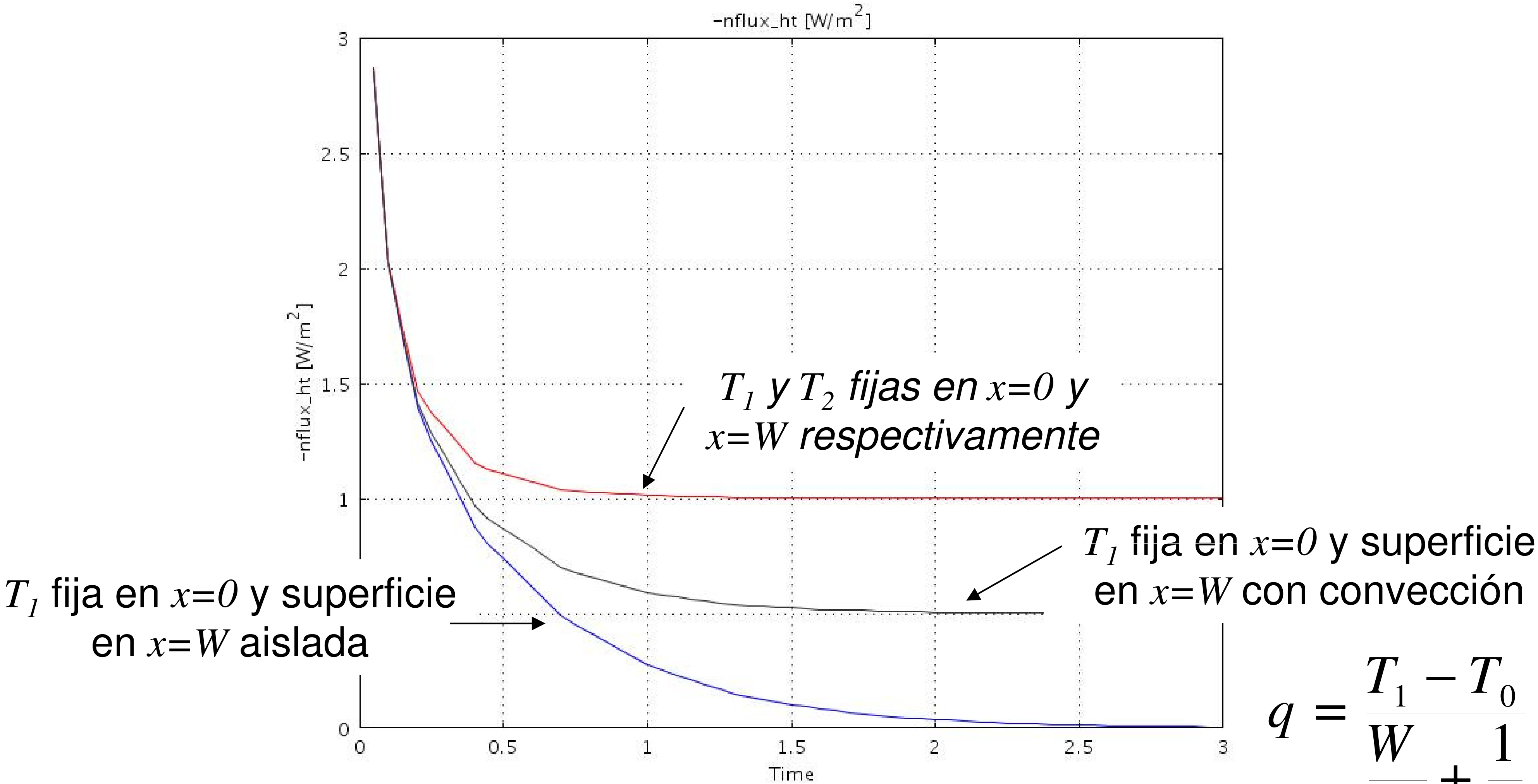
$q=$?

Perfil de temperatura?

Fo para lograr estado estacionario?

Caso con convección en una superficie

El flujo de calor en función del tiempo en x=0 será:



$$q = \frac{T_1 - T_0}{\frac{W}{k} + \frac{1}{h}}$$

Criterios para estado estacionario

Placa o Bloque, Situación	***Criterio***
Ancho W; un extremo aislado; una superficie con cambio de temperatura	$Fo = \frac{\alpha \cdot t}{W^2} \geq 2$
Ancho 2W; ambas superficies expuestas al mismo cambio repentino de temperatura	$Fo = \frac{\alpha \cdot t}{W^2} \geq 2$
Ancho W; un lado mantenido a la temperatura inicial; una superficie con cambio repentino de temperatura	$Fo = \frac{\alpha \cdot t}{W^2} \geq 1$
Ancho W; una superficie con cambio brusco de temperatura (T_0 a T_1), la otra superficie cambia de T_0 a T_W debido a convección en esa superficie	$Fo = \frac{\alpha \cdot t}{W^2} \geq 1 + \frac{T_W - T_0}{T_1 - T_0}$

Ejemplo 27

Determinar cuanto tiempo toma en alcanzar el estado estacionario la transferencia de calor de un reactor donde las paredes están hechas con 60 cm de ladrillo con k = 2,5 W/m²K, C_p = 1130 J/kgºC y ρ = 2500 kg/m³.

Asumir que la temperatura de la pared permanece constante e igual a la temperatura del aire exterior y que la temperatura de la superficie interior es alcanzada inmediatamente (no real).

Ejemplo 27, Solución:

Con la información entregada, la difusividad térmica de la pared es:

$$\alpha\left(\frac{m^2}{s}\right) = \frac{k}{\rho \cdot c_p} = \frac{2.5}{2500 \cdot 1120} = 8.92 \cdot 10^{-7}$$

Ejemplo 27, Solución:

Ya que la temperatura externa permanece constante, el estado estacionario se alcanza cuando Fo = 1, y el tiempo requerido es:

$$t \geq \frac{w}{\alpha} = \frac{0.60^2}{8.92 \cdot 10^{-7}} s = 403000 s = 112 h$$

Inicialmente se necesita suministrar un alto flujo de calor para llevar el interior del reactor a la temperatura requerida. Los consumos de calor disminuirán en el tiempo hasta que el estado estacionario se alcance.

Conducción Transiente

El balance de calor para un sistema transiente es:

$$\frac{d(Calor)}{dt} = q_{ent} + q_{gen} - q_{sal} - q_{cons}$$

Acumulación = Entrada + Generación – Salida - Consumo

El cambio de energía o calor de un sistema debido a cambios de temperatura está dado por:

$$d(Calor)[\mathrm{J}] = m \cdot c_p \cdot dT = \rho \cdot V \cdot c_p dT$$

Con capacidad calórica constante, la acumulación de calor en el tiempo debido a cambios de temperatura es:

$$\frac{d(Calor)}{dt}\left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}}\right] = \rho \cdot V \cdot c_p \frac{dT}{dt}$$

Conducción Transiente

$$\frac{d(Calor)}{dt}\left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}}\right]=\rho\cdot V\cdot c_p\frac{dT}{dt}$$

En el caso particular de conducción en una dimensión, sin generación o consumo y con flujos de calor dados, el balance de energía queda:

$$\rho\cdot(A\cdot L)\cdot c_p\frac{dT}{dt}=A\cdot(q_{ent}-q_{sal})$$

$$\rho\cdot L\cdot c_p\frac{dT}{dt}=q_{ent}-q_{sal}$$

donde q_{ent} y q_{sal} están dados en W/m^2 y L es el ancho del sistema

Ejemplo 28:

En algún momento durante el calentamiento de una muralla de 0.05 m de espesor, el flujo de calor hacia ella era de 200 W/m^2 y desde ella de 50 W/m^2.

Considere ρ = 750 kg/m^3 y C_p = 1250 J/(kg ºC).

Determinar la tasa de calentamiento promedio de la muralla en ese momento.

Ejemplo 28, Solución:

Debido a que no hay generación ó consumo de calor, la tasa de acumulación de energía en las paredes es igual al flujo de calor de entrada menos el flujo de calor de salida. Como la energía se acumula en la pared la temperatura promedio aumenta. Entonces:

$$\rho \cdot L \cdot c_p \left(\frac{dT}{dt}\right)_{prom} = q_{ent} - q_{sal}$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{(200-50)\frac{W}{m^2}}{750\frac{kg}{m^3} \cdot 0.05m \cdot 1250\frac{Ws}{kg^\circ C}} = 0.0032\frac{^\circ C}{s} = 11.5\frac{^\circ C}{h}$$

Transferencia de calor Transiente

El balance de calor para un sistema transiente en 1D y sin fuentes volumétricas es:

Acumulación = Flujo Neto de Calor

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = -\frac{dq}{dx} = \frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right)$$

En notación vectorial (3D):

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = (\nabla \cdot k \nabla T)$$

y si la k es independiente de la T y de la posición:

$$\frac{dT}{dt} = \alpha \nabla^2 T = \alpha\left(\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{d^2T}{dy^2} + \frac{d^2T}{dz^2}\right)$$

Transferencia de calor Transiente

$$\frac{dT}{dt} = \alpha\nabla^2 T = \alpha\left(\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{d^2T}{dy^2} + \frac{d^2T}{dz^2}\right)$$

α, se define como, la difusividad térmica y es la habilidad de un material de conducir (k) energía térmica en relación a su capacidad de almacenar energía térmica (c_p). Materiales con un gran valor de α, responden rápidamente a cambios térmicos.

En casos en que el sistema incluye una fuente de calor, Q_{gen}(W/m^3), (eléctrica, microondas, decaimiento radiactivo, hidratación del cemento, reacciones químicas, calcinación, etc.), y si ésta es liberada, entonces se tiene:

$$\frac{dT}{dt} = \alpha\left(\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{d^2T}{dy^2} + \frac{d^2T}{dz^2}\right) + \frac{Q_{gen}}{\rho c_p}$$

Ejemplo 29:

Para un bloque con conductividad k y ancho L, con temperaturas fijas T_0 y T_L en ambas superficies, mostrar que la ecuación

$$\frac{dT}{dt} = \alpha \frac{d^2T}{dx^2}$$

en estado estacionario se simplifica a:

$$q = -k \frac{T_L - T_0}{L}$$

Ejemplo 29, Solución:

En estado estacionario: $$\frac{dT}{dt}=0 \Rightarrow \frac{d^2T}{dx^2}=0 \Rightarrow \frac{dT}{dx}=C_1 \Rightarrow T=C_1x+C_2$$

donde C_1 y C_2 son las constantes de integración.

Aplicando las condiciones de borde: en $x = 0$, $T = T_0$ y en $x = L$, $T = T_L$.

$C_2 = T_0$ y $C_1 = (T_L-T_0)/L$, así

$$T=\frac{T_L-T_0}{L}x+T_0$$

Usando la definición del flujo de calor (ley de Fourier) se obtiene:

$$q=-k\frac{dT}{dx} \qquad q=-k\frac{d}{dx}\left(\frac{T_L-T_0}{L}x+T_0\right)=-k\frac{T_L-T_0}{L}$$

Transferencia de calor Transiente coordenadas cilíndricas y essféricas

En coordenadas cilíndricas (r,ϕ,z) la ecuación de conducción de calor queda:

$$\frac{dT}{dt}=\alpha\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{d^2T}{d\phi^2}+\frac{d^2T}{dz^2}\right)+\frac{Q_{gen}}{\rho c_p}$$

y si la temperatura sólo varía en la dirección radial:

$$\frac{dT}{dt}=\frac{\alpha}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)+\frac{Q_{gen}}{\rho c_p}$$

Mientras que en coordenadas esféricas (r,ϕ,θ) la ecuación de conducción de calor, cuando la temperatura sólo varía en la dirección radial, queda:

$$\frac{dT}{dt}=\frac{\alpha}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dT}{dr}\right)+\frac{Q_{gen}}{\rho c_p}$$