



TAREA RECUPERATIVA MI3010 Enero 2012

**FECHA DE ENTREGA: día del examen
(SÓLO CONSULTAS DE ENUNCIADO)**

PREGUNTA 1 (Fluidodinámica)

Viscosímetro oscilatorio de torsión (figura 4C.2). En este tipo de viscosímetro, el fluido se coloca entre una "copa" y un "péndulo" como se muestra en la figura. Se hace que la copa experimente *pequeñas* oscilaciones sinusoidales en la dirección tangencial. Este movimiento provoca que el péndulo, suspendido por un alambre de torsión, oscile a la misma frecuencia, pero con amplitud y fase diferentes. La razón de amplitud (razón de amplitud de la función de salida respecto a la función de entrada) y el desplazamiento de fase dependen de la viscosidad del fluido y por tanto pueden usarse para determinar la viscosidad. En todo el experimento se supone que las oscilaciones son de amplitud *pequeña*. De modo que el problema es de tipo lineal y puede resolverse mediante la transformada de Laplace o mediante el método descrito en este problema.

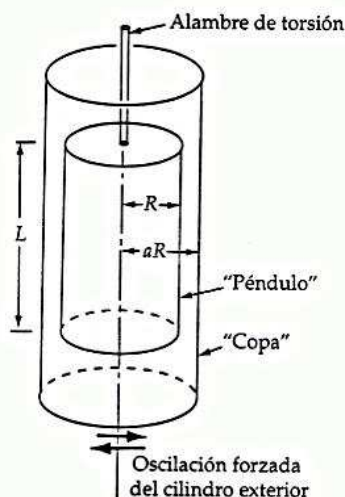


Figura 4C.2 Esquema de un viscosímetro oscilatorio de torsión.

a) Primero, aplicar la segunda ley de movimiento de Newton al péndulo cilíndrico para el caso especial en que el espacio anular está completamente vacío. Demostrar que la frecuencia natural del sistema es $\omega_0 = \sqrt{k/I}$, donde I es el momento de inercia del péndulo y k es la constante del resorte para el alambre de torsión.

b) A continuación, aplicar la segunda ley de Newton cuando en el espacio anular hay un fluido de viscosidad μ . Sean θ_R el desplazamiento angular del péndulo en el instante t , y v_θ la velocidad tangencial del fluido como una función de r y t . Demostrar que la ecuación de movimiento del péndulo es

$$\text{(Péndulo)} \quad I \frac{d^2 \theta_R}{dt^2} = -k \theta_R + (2\pi RL)(R) \left(\mu r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) \right) \Big|_{r=R} \quad (4C.2-1)$$



Si el sistema comienza desde el reposo, se tienen las condiciones iniciales

$$\text{C.I.:} \quad \text{en } t = 0, \quad \theta_R = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d\theta_R}{dt} = 0 \quad (4C.2-2)$$

c) Luego, escribir la ecuación de movimiento para el fluido junto con las condiciones inicial y límites relevantes:

$$\text{(Fluido)} \quad \rho \frac{\partial v_\theta}{\partial t} = \mu \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_\theta) \right) \quad (4C.2-3)$$

$$\text{C.l.:} \quad \text{en } t = 0, \quad v_\theta = 0 \quad (4C.2-4)$$

$$\text{C.L. 1:} \quad \text{en } r = R, \quad v_\theta = R \frac{d\theta_R}{dt} \quad (4C.2-5)$$

$$\text{C.L. 2:} \quad \text{en } r = aR, \quad v_\theta = aR \frac{d\theta_{aR}}{dt} \quad (4C.2-6)$$

La función $\theta_{aR}(t)$ es una función sinusoidal específica (la "entrada"). Elaborar un dibujo que muestre a θ_{aR} y θ_R como funciones del tiempo, y que defina la razón de amplitud y el desplazamiento de fase.

d) Simplificar las ecuaciones de inicio, ecuaciones 4C.2-1 a 4C.2-6, estableciendo la suposición de que a es sólo ligeramente mayor que la unidad, de modo que es posible despreciar la curvatura (el problema puede resolverse sin hacer esta suposición).⁴ Esto sugiere que una variable adimensional idónea para la distancia es $x = (r - R)/[(a - 1)R]$. Volver a plantear todo el problema en cantidades adimensionales de forma que $1/\omega_0 = \sqrt{I/k}$ se use como un tiempo característico, y que la viscosidad aparezca sólo en un grupo adimensional. Ocurre que la única opción es:

$$\text{tiempo:} \quad \tau = \sqrt{\frac{k}{I}} t \quad (4C.2-7)$$

$$\text{velocidad:} \quad \phi = \frac{2\pi R^3 L \rho (a-1)}{\sqrt{kI}} v_\theta \quad (4C.2-8)$$

$$\text{viscosidad:} \quad M = \frac{\mu / \rho}{(a-1)^2 R^2} \sqrt{\frac{I}{k}} \quad (4C.2-9)$$

$$\text{recíproco del momento de inercia:} \quad A = \frac{2\pi R^4 L \rho (a-1)}{I} \quad (4C.2-10)$$

Demostrar que ahora el problema puede replantearse como sigue:

$$\text{(péndulo)} \quad \frac{d^2 \theta_R}{d\tau^2} = -\theta_R + M \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} \quad \text{en } t = 0, \quad \theta_R = 0 \quad (4C.2-11)$$

$$\text{(fluido)} \quad \frac{\partial \phi}{\partial \tau} = M \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad \begin{cases} \text{en } \tau = 0, & \phi = 0 \\ \text{en } x = 0, & \phi = A(d\theta_R/dt) \\ \text{en } x = 1, & \phi = A(d\theta_{aR}/dt) \end{cases} \quad (4C.2-12)$$

A partir de estas dos ecuaciones se quiere obtener θ_R y ϕ como funciones de x y τ , con M y A como parámetros.



e) Obtener la solución “de estado estacionario sinusoidal” al considerar que la función de entrada θ_{aR} (el desplazamiento de la copa) es de la forma

$$\theta_{aR}(\tau) = \theta_{aR}^{\circ} \Re\{e^{i\bar{\omega}\tau}\} \quad (\theta_{aR}^{\circ} \text{ es real}) \quad (4C.2-13)$$

donde $\bar{\omega} = \omega/\omega_0 = \omega\sqrt{l/k}$ es una frecuencia adimensional. Luego, postular que los movimientos del péndulo y del fluido también son sinusoidales, pero con amplitudes y fases diferentes

$$\theta_R(\tau) = \Re\{\theta_R^{\circ} e^{i\bar{\omega}\tau}\} \quad (\theta_R^{\circ} \text{ es complejo}) \quad (4C.2-14)$$

$$\phi(x, \tau) = \Re\{\phi^{\circ}(x) e^{i\bar{\omega}\tau}\} \quad (\phi^{\circ}(x) \text{ es complejo}) \quad (4C.2-15)$$

Verificar que la razón de amplitud está dada por $|\theta_R^{\circ}|/\theta_{aR}^{\circ}$, donde $|\cdot|$ indica la magnitud absoluta de una cantidad compleja. Además, demostrar que el ángulo de fase α está dado por $\tan \alpha = \Im\{\theta_R^{\circ}\}/\Re\{\theta_R^{\circ}\}$, donde \Re y \Im representan las partes real e imaginaria, respectivamente.

f) Sustituir las soluciones postuladas del inciso e) en las ecuaciones del inciso d) a fin de obtener las ecuaciones para las amplitudes complejas θ_R° y ϕ° .

g) Resolver la ecuación para $\phi^{\circ}(x)$ y verificar que

$$\left. \frac{d\phi^{\circ}}{dx} \right|_{x=0} = -\frac{A(i\bar{\omega})^{3/2}}{\sqrt{M}} \left(\frac{\theta_R^{\circ} \cosh\sqrt{i\bar{\omega}/M} - \theta_{aR}^{\circ}}{\sinh\sqrt{i\bar{\omega}/M}} \right) \quad (4C.2-16)$$

h) A continuación, resolver la ecuación θ_R° para obtener

$$\frac{\theta_R^{\circ}}{\theta_{aR}^{\circ}} = \frac{AMi\bar{\omega}}{(1-\bar{\omega}^2) \frac{\sinh\sqrt{i\bar{\omega}/M}}{\sqrt{i\bar{\omega}/M}} + AMi\bar{\omega} \cosh\sqrt{i\bar{\omega}/M}} \quad (4C.2-17)$$

a partir de la cual es posible encontrar la razón de amplitud $|\theta_R^{\circ}|/\theta_{aR}^{\circ}$ y el desplazamiento de fase α .

i) Para fluidos altamente viscosos puede buscarse una serie de potencias desarrollando las funciones hiperbólicas en la ecuación 4C.2-17 para obtener una serie de potencias en $1/M$. Demostrar que lo anterior conduce a

$$\frac{\theta_{aR}^{\circ}}{\theta_R^{\circ}} = 1 + \frac{i}{M} \left(\frac{\bar{\omega}^2 - 1}{A\bar{\omega}} + \frac{\bar{\omega}}{2} \right) - \frac{1}{M^2} \left(\frac{\bar{\omega}^2 - 1}{6A} + \frac{\bar{\omega}^2}{24} \right) + O\left(\frac{1}{M^3}\right) \quad (4C.2-18)$$

A partir de esto, encontrar la razón de amplitud y el ángulo de fase.

j) Graficar $|\theta_R^{\circ}|/\theta_{aR}^{\circ}$ contra $\bar{\omega}$ para $\mu/\rho = 10^{-2} \text{ cm}^2/\text{s}$, $L = 25 \text{ cm}$, $R = 5.5 \text{ cm}$, $I = 2500 \text{ g cm}^2$, $k = 4 \times 10^6 \text{ dinas/cm}$. ¿Dónde está el máximo de la curva?



PREGUNTA 2 (Transporte de Calor)

Elevación de la temperatura en un gránulo catalizador esférico (figura 11B.11). Un gránulo (pellet) catalizador tiene radio R y conductividad térmica k (que puede suponerse constante). Debido a la reacción química que ocurre dentro del gránulo poroso, se genera calor a una velocidad de S_c cal/cm³ · s. En la superficie externa del gránulo se pierde calor hacia una corriente de gas a temperatura constante T_g por transmisión de calor convectivo, con coeficiente de transmisión de calor h . Encontrar el perfil de temperatura en estado estacionario suponiendo que S_c se mantiene constante en todas partes.

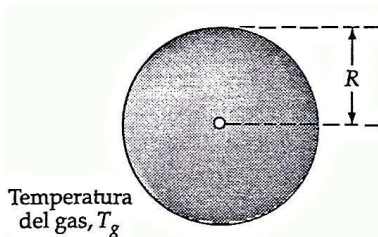


Figura 11B.11 Esfera con generación de calor interna.

- Establecer la ecuación diferencial haciendo un balance de envoltura de energía.
- Establecer la ecuación diferencial simplificando la forma apropiada de la ecuación de energía.
- Integrar la ecuación diferencial para obtener el perfil de temperatura. Dibujar la función $T(r)$.
- ¿Cuál es la forma límite de $T(r)$ cuando $h \rightarrow \infty$?
- ¿Cuál es la temperatura máxima en el sistema?
- ¿En qué parte de la deducción debe modificarse el procedimiento para explicar las variables k y S_c ?



PREGUNTA 3 (Transporte de Masa)

Oxidación de silicio (figura 19B.4).¹ Una placa de silicio se expone a oxígeno gaseoso (especie A) a presión p , produciendo una capa de dióxido de silicio (especie B). La capa se extiende desde la superficie $z = 0$, donde el oxígeno se disuelve con concentración $c_{A0} = Kp$, hasta la superficie en $z = \delta(t)$, donde el oxígeno y el silicio experimentan una reacción de primer orden con coeficiente de velocidad k_1'' . Debe pronosticarse el espesor $\delta(t)$ de la capa de óxido en crecimiento. Aquí es de utilidad un método en estado casi estacionario, debido a que el avance del frente de la reacción es muy lento.

a) Primero resuelva la ecuación diferencial de la ecuación 19.1-18, despreciando el término $\partial c_A / \partial t$, y aplique las condiciones límite para obtener

$$c_A = c_{A0} - (c_{A0} - c_{A\delta}) \frac{z}{\delta} \quad (19B.4-1)$$

donde aún se desconoce la concentración $c_{A\delta}$ en el plano en que ocurre la reacción.

b) Luego, use un balance molar en estado no estacionario para el O_2 sobre la región $0 < z < \delta(t)$ para obtener, con ayuda de la fórmula de Leibniz que se proporciona en §C.3,

$$c_{A\delta} \frac{d\delta}{dt} = - \mathcal{D}_{AB} \frac{dc_A}{dz} - k_1'' c_{A\delta} \quad (19B.4-2)$$

c) Ahora escriba un balance molar en estado no estacionario para el SiO_2 sobre la misma región para obtener

$$+k_1'' c_{A\delta} = \frac{1}{\bar{V}_B} \frac{d\delta}{dt} \quad (19B.4-3)$$

d) En la ecuación 19B.4-2, evaluar $d\delta/dt$ a partir de la ecuación 19B.4-3 y dc_A/dz a partir de la ecuación 19B.4-1. Lo anterior lleva a una ecuación para $c_{A\delta}$:

$$\frac{k_1'' \delta \bar{V}_B}{\mathcal{D}_{AB}} c_{A\delta}^2 + \left(1 + \frac{k_1'' \delta}{\mathcal{D}_{AB}}\right) c_{A\delta} = c_{A0} \quad (19B.4-4)$$

La inserción de valores numéricos en la ecuación 19B.4-4 muestra que el término cuadrático puede despreciarse sin ningún riesgo.¹

e) Combine las ecuaciones 19B.4-3 y 19B.4-4 (sin el término cuadrático) a fin de obtener una ecuación diferencial para $\delta(t)$. Demuestre que lo anterior lleva a

$$\frac{\delta^2}{2\mathcal{D}_{AB}} + \frac{\delta}{k_1''} - \bar{V}_B c_{A0} t \quad (19B.4-5)$$

lo cual coincide con datos experimentales.¹ Interprete el resultado.



fcfm

Ingeniería de Minas
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

* Ec. 19.1-18, segunda ley de Fick

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} = D_{AB} \nabla^2 C_A$$

** Formula de Leibniz para diferenciar una integral de volumen

$$\frac{d}{dt} \int_V s dV = \int_V \frac{\partial s}{\partial t} dV + \int_S s (v_s \cdot n) dS$$

V = Volumen móvil

S = Superf. que envuelve V

v_s = velocidad de cualquier elemento de superficie

$$\therefore s = s(x, y, z, t)$$