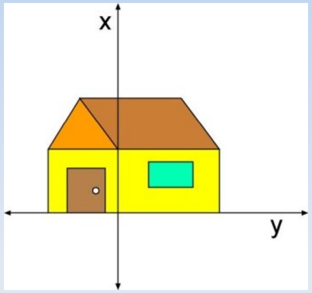
Transformaciones geométricas en 2D y 3D (Parte I)

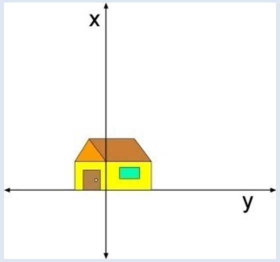
Contenido

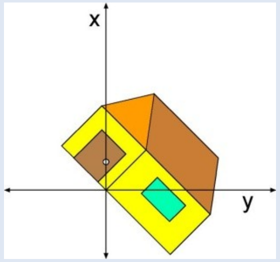
- Motivación (2D)
- Tranformaciones básicas: rotación, traslación y escalamiento
- Coordenadas homogéneas
- Composición de transformaciones
- Otras transformaciones: reflexión y shearing

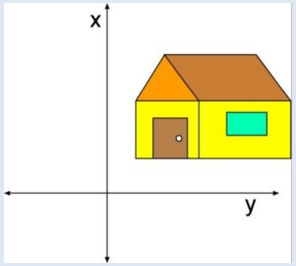
Motivación

Muy Importante en animaciones









Escalamiento (50%)

Rotación (45º)-

Traslación

Motivación: Visualizar y animar modelos 2D

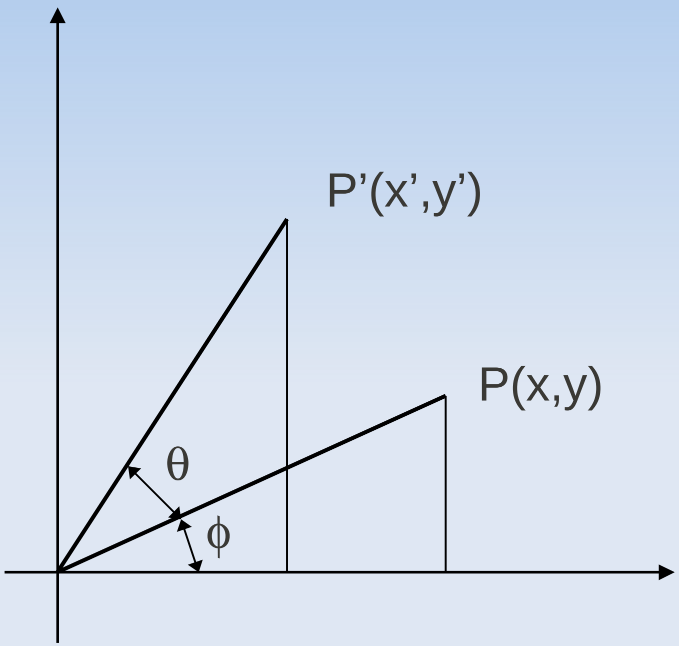
- La visualización de modelos bidimensionales requiere la capacidad de crear y manipular (cambiar tamaño, posición u orientación) de entidades como líneas, triángulos, puntos, etc.
- Representación de geometrías 2D
  - Sistema de coordenadas cartesiano x,y
  - Punto como elemento básico. Por ejemplo, un segmento de línea se representa por sus puntos extremos, un triángulo por tres puntos, etc.

Transformaciones 2D

- Rotación

$x' = x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\theta$

$y' = x\,\mathrm{sen}\theta + y\cos\theta$



- Notación matricial

P' = R P

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Transformaciones 2D

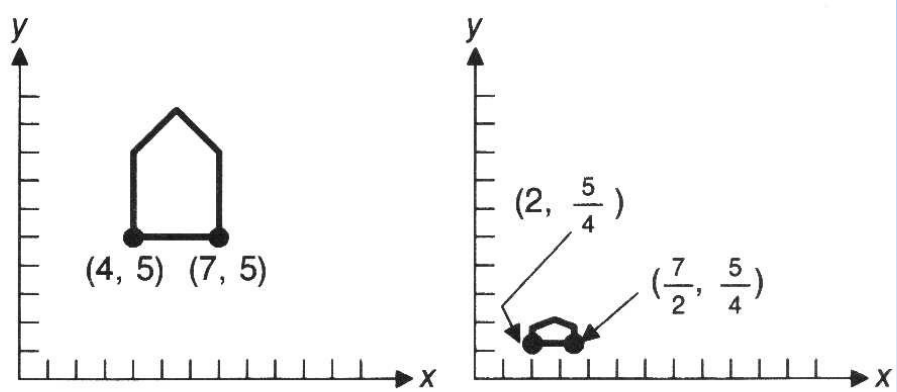
- Escalamiento

  $x' = s_x\, x$

  $y' = s_y\, y$

  $P' = S\, P$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



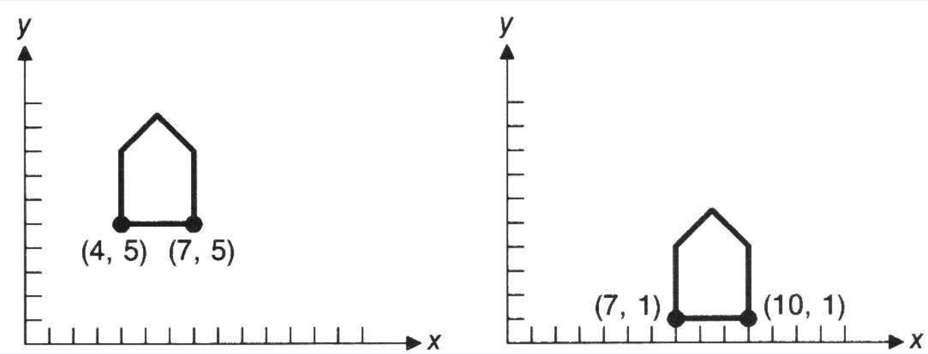
- Traslación

  $x' = x + d_x$

  $y' = y + d_y$

  ¿Notación matricial?

  (matriz T) No tiene



Coordenadas homogéneas

- Es deseable una representación matricial uniforme para las transformaciones geométricas.

  - Coordenadas homogéneas:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_h \\ y_h \\ h \end{bmatrix} \qquad x = \frac{x_h}{h} \quad y = \frac{y_h}{h}$$

  - Cada punto tiene muchas representaciones en coordenadas homogéneas. $(0, 0, 0)^T$ no está permitido.

Coordenadas homogéneas

- Propiedades / restricciones
    - Ejemplo de infinitas representaciones para un mismo punto
    - (2,3,6) = (4,6,12) = (1/3, 1/2, 1)
- Con frecuencia se normaliza w =1
- El punto (x, y, 0) representa punto en el infinito en la dirección (x, y)
    - Estas coordenadas “homogeinizan” el tratamiento del infinito

Coordenadas homogéneas

- Si especificamos las transformaciones anteriores en coordenadas homogéneas, qué se logra?

$$P' = T(d_x, d_y) P \qquad P' = R(\theta) P \qquad P' = S(s_x, s_y) P$$

$$T(d_x, d_y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad S(s_x, s_y) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformaciones compuestas bidimensionales

- Propuesto: mostrar que
  - $P' = T(t_{1x}, t_{1y})\, T(t_{2x}, t_{2y})\, P = T(t_{1x} + t_{2x}, t_{1y} + t_{2y})\, P$
  - $P' = S(s_{1x}, s_{1y})\, S(s_{2x}, s_{2y})\, P = S(s_{1x} + s_{2x}, s_{1y} + s_{2y})\, P$
  - $P' = R(\theta_1)\, R(\theta_2)\, P = R(\theta_1 + \theta_2)\, P$

Composición de transformaciones

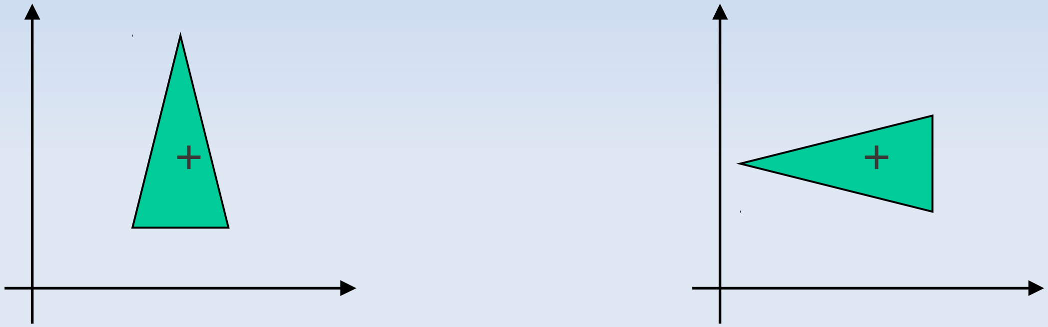
- Se combinan las matrices elementales para producir el efecto deseado
- Se gana eficiencia usando la matriz resultante
  - Ejemplo: Rotación alrededor de punto arbitrario $P_1(x_1, y_1)$
- Pasos:
  - Traslade P_1 al origen
  - Rote alrededor del origen
  - Traslade para que el punto en el origen vuelva a P_1

$T(x_1, y_1) \,.\, R(\theta) \,.\, T(-x_1, -y_1) = \quad M \qquad$ Matriz Resultante

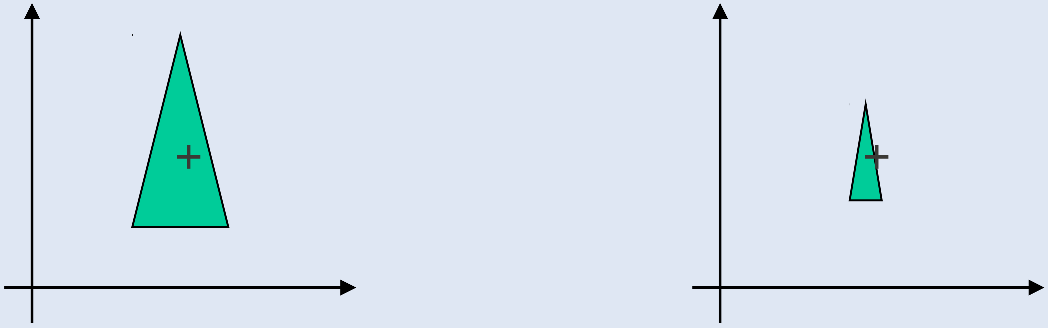
3º 2º 1º

Composición de transformaciones

- Expresar como una composición de transformaciones:
  - Rotación en torno a un punto distinto del origen

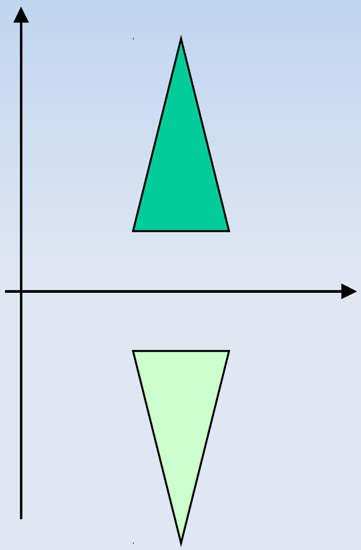


  - Escalamiento en torno a un punto distinto del origen

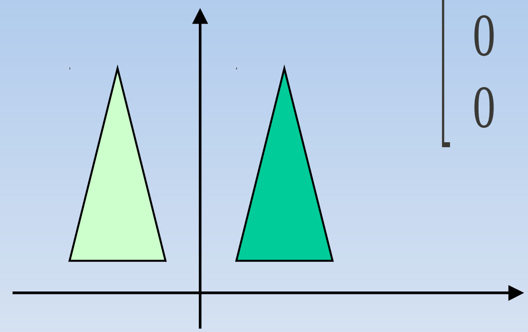


Otras Transformaciones 2D

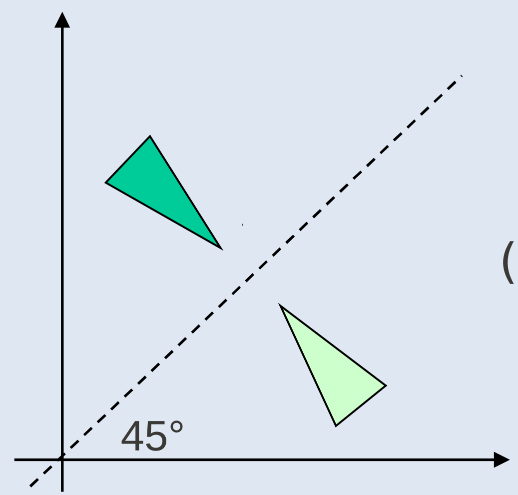
Reflexión



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

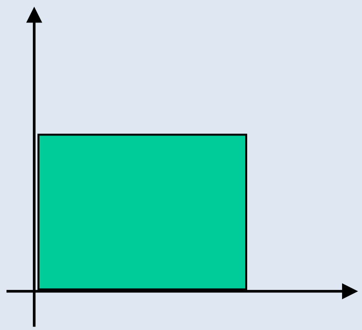


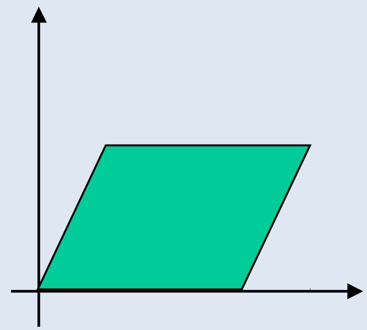
(propuesto)

Otras Transformaciones 2D

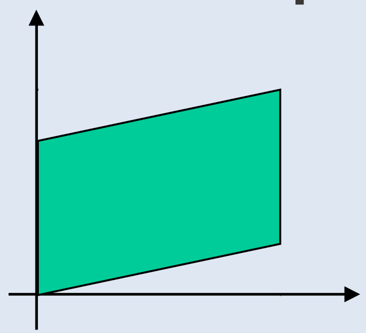
Shearing: Esta transformación cambia el valor de las coordenadas sumándole un valor lineal de la otra coordenada. La matriz general corresponde a

$$\begin{bmatrix} 1 & sh_y & 0 \\ sh_x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$





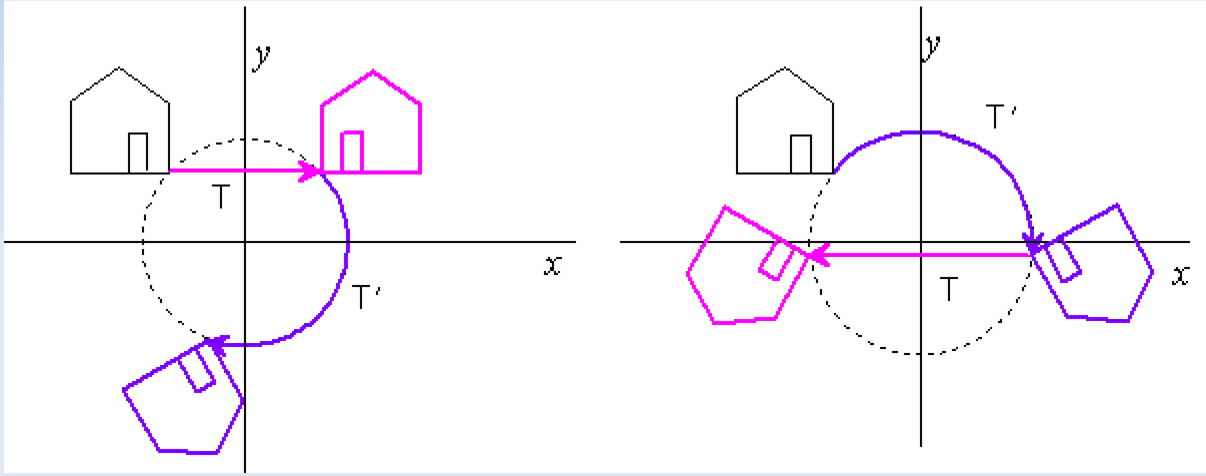
Shearing en dirección x



Shearing en dirección y

¿Serán conmutativas las transformaciones?

- ¿ P' = T' T P = T T' P ?



- No siempre !
  - Próxima clase: cuáles son commutativas y cuales no, cómo especificarlas en OpenGl y transformaciones en 3D