IN4703 - Gestión de Operaciones I
Profesores: Andrés Weintraub, Fabián Medel
Rodrigo Wolf

Auxiliares: María José Gorigoitía, Matías Siebert
Paulina Briceño, Rodrigo Arriagada, Juan Neme

Auxiliar 1: Repaso PPL

Lunes 19 de Marzo de 2012

P1)

El nuevo programa de postgrado MPA de una prestigiosa universidad ha recibido n postulaciones excelentes para su primera generación y por capacidad no puede aceptar todas. Tiene el problema de seleccionar las hasta m postulaciones más adecuadas para el programa ($m<n$).

Como es de carácter público no puede solamente seleccionar para maximizar el beneficio económico del programa. Cada generación tiene que cumplir además con los siguientes criterios.

Por lo menos 40% de los aceptados tienen que pertenecer a cada sexo. El parámetro Si indica el sexo del postulante i ($i=1$, ..., n). $Si=1$ significa femenino y $Si=0$ significa masculino.

El programa busca tener impacto en regiones por lo que por lo menos 50% de los aceptados de cada generación deben venir de regiones. El parámetro Ri indica la proveniencia del postulante i ($i=1$, ..., n). $Ri=1$ significa regiones y $Ri=0$ significa RM.

Es importante lograr alta exigencia académica por lo que el programa quiere aceptar alumnos que en promedio tengan un puntaje de por lo menos $Pmin$. Pi es el puntaje del postulante i ($i=1$, ..., n).

El ingreso generado por cada generación debe superar en por lo menos 20% los costos asociados C (UM).

En un principio cada alumno aceptado tiene que pagar un arancel de A UM. El programa ofrece hasta B becas para alumnos excelentes ($B<n$). Los criterios para otorgar estas becas son los siguientes. Un postulante i con un puntaje Pi mayor que 750 paga sólo 50% del arancel si viene de la RM y paga sólo 25% del arancel si viene de regiones.

El objetivo es maximizar el ingreso generado por cada generación aceptada.

1. Plantee un modelo de Programación Lineal para resolver este problema.
2. ¿Son todas las restricciones mencionadas necesarias? Comente.
3. ¿Se está favoreciendo a alguien con la formulación actual?

Solución:

1.Variables de decisión

Xi=1 Si se acepta el alumno i

0 sino.

Yi=1 Si se acepta el alumno i

0 sino

Restricciones:

a. Relacion entre variables:

$$Yi \leq Xi$$

b. Se aceptan a lo más m postulantes:

$$\sum_{i=1}^{n} Xi \leq m$$

c. Al menos 40% de los aceptados deben ser de cada sexo:

$$0{,}4 * \sum_{i=1}^{n} Xi \leq \sum_{i=1}^{n} Xi * Si \leq 0{,}6 * \sum_{i=1}^{n} Xi$$

d. 50% de los aceptados deben venir de regiones:

$$0,5 * \sum_{i=1}^{n} Xi \leq \sum_{i=1}^{n} Xi * Ri$$

e. Puntaje promedio de los alumnos debe ser al menos Pmin:

$$P_{\min} * \sum_{i=1}^{n} Xi \leq \sum_{i=1}^{n} Xi * Pi$$

f. Ingreso generado debe superar al menos el 20% de los costos:

$$\sum_{i=1}^{n} Xi * A - \sum_{i=1}^{n} Yi * Ri * 0,75 * A - \sum_{i=1}^{n} Yi * (1 - Ri) * 0,5 * A \geq 1,2 * C$$

g. Máximo B becas:

$$\sum_{i=1}^{n} Yi \leq B$$

h. Criterio para otrogar becas:

$$(Xi - Yi) * Pi \leq 750$$

i. Naturaleza de las variables:

$$Xi, Yi \in \{0,1\}$$

Función Objetivo:

$$\max\{ \sum_{i=1}^{n} Xi * A - \sum_{i=1}^{n} Yi * Ri * 0{,}75 * A - \sum_{i=1}^{n} Yi * (1 - Ri) * 0{,}5 * A$$

2. Se puede eliminar la restricción de ingreso mayor que 1,2* costos, pues al maximizar el ingreso podemos ver si se da o no esta restricción.

3. *Alternativa 1:* Al maximizar el ingreso se favorece a los postulantes de menor puntaje, ya que se intentará dar la menor cantidad de becas posibles. Al resolver el problema, asignará primero a las personas más cercanas al puntaje Pmin (de forma que en promedio el puntaje sea casi igual o igual a Pmin), asi asignará una persona con puntaje sobre Pmin y luego suficientes personas con puntaje bajo Pmin para que se mantenga el promedio Pmin. Luego se repite el proceso varias veces.

Alternativa 2: La restricción “h” obliga a que un alumno con más de 750 y que ha sido aceptado tenga beca, por lo tanto, si se nos acaban las B becas, los alumnos restantes con más de 750 puntos no serán aceptados en la universidad. No se les da la posibilidad de pagar el arancel completo, simplemente se rechazan.

P2)

Considere el problema de localización de plantas de una empresa productora de plástico. Éste considera N posibles localizaciones y K alternativas tecnológicas.

El producto puede ser transportado a Santiago para su venta por contrato o a Valparaíso para su exportación. Se considera, para este último caso, que la cantidad a exportar es libre pero con tope EXPF y que para cada período se ha estimado una curva de demanda. Considere, además, que no se puede almacenar el producto.

Además, se conocen los siguientes parámetros:

$\mathrm{PEXP1t}$: Precio unitario de exportación para el tramo [0, EXP1] en el período t.

$\mathrm{PEXP2t}$: Precio unitario de exportación para el tramo [EXP1, EXPF] en el período t.

$\mathrm{PEXP1t} > \mathrm{PEXP2t}$

PSTGOt : Precio unitario de venta en Santiago en el período t.

DSTGOt : Demanda fija a cumplir para Santiago en el período t.

CAP_k : Capacidad de la planta con tecnología k.

$CINV_{ikt}$: Costo de inversión en una planta con tecnología k en la localización i y período t.

$COPER_{ikt}$: Costo unitario de producción de la planta con tecnología k y localización i en el período t. Incluye costos de materia prima, mantenciones, etc.

$CTRANS_{ijt}$: Costo unitario de transporte desde la planta ubicada en i al destino j ($j=1$, Santiago, o $j=2$, Valparaíso) en el período t.

Plantee un modelo de programación lineal mixta para decidir cuántas plantas abrir, sus localizaciones y alternativas tecnológicas de tal modo de maximizar el beneficio actual neto (BNA).

Considere un horizonte de T períodos y que los parámetros monetarios para cada período ya llevan incorporada la tasa de descuento. Defina claramente variables, restricciones y función objetivo.

Solución:

Variables:

$$x_{ik}^{t} = \begin{cases} 1 & si\ se\ construye\ planta\ i\ con\ tecnolog\acute{\imath}a\ k\ en\ periodo\ t \\ 0 & si\ no \end{cases}$$

$$y_{ik}^{t} = cantidad\ producida\ por\ planta\ i\ con\ tecnolog\acute{\imath}a\ k\ en\ periodo\ t$$

$$w_{ij}^{t} = cantidad\ trasnportada\ de\ planta\ i\ a\ destino\ j\ en\ periodo\ t$$

$$z_{1}^{t} = cantidad\ exportada\ a\ precio\ PEXP_{1}^{t}\ en\ periodo\ t$$

$$z_{2}^{t} = cantidad\ exportada\ a\ precio\ PEXP_{2}^{t}\ en\ periodo\ t$$

Restricciones:

a. Naturaleza de las Variables:

$$x_{ik}^{t} \in \{0,1\},\ y_{ik}^{t}, w_{ij}^{t}, z_{1}^{t}, z_{2}^{t} \geq 0 \quad \forall i, j, k, t$$

b. Cada planta se construye a lo más una vez y a lo más con una tecnología:

$$\sum_{t} \sum_{k} x_{ik}^{t} \leq 1 \quad \forall i$$

c. Capacidad de Producción:

$$y_{ik}^{t} \leq CAP_{k} \cdot \sum_{\tau=1}^{t} x_{ik}^{\tau} \quad \forall i, k$$

d. Cantidad Transportada:

$$\sum_j w_{ij}^t = \sum_k y_{ik}^t \quad \forall i, t$$

e. Demanda de Santiago:

$$\sum_i w_{i,STGO}^t = DSTGO^t \quad \forall t$$

f. Exportaciones:

$$z_1^t + z_2^t = \sum_i w_{i,VALPO}^t \quad \forall t$$

g. Definición de Z1t, Z1t:

$$z_1^t \leq EXP_1 \quad \forall t$$
$$z_2^t \leq EXP_F - EXP_1 \quad \forall t$$

Función Objetivo:

$$Max \sum_{t=1}^{T} \left\{ \begin{array}{l} PSTGO^t \cdot \sum_i w_{i,STGO}^t + PEXP_1^t \cdot z_1^t + PEXP_2^t \cdot z_2^t - \sum_i \sum_k CINV_{ik}^t \cdot x_{ik}^t \\ - \sum_i \sum_k COPER_{ik}^t \cdot y_{ik}^t - \sum_i \sum_j CTRANS_{ij}^t \cdot w_{ij}^t \end{array} \right\}$$

Notar que si bien la función objetivo se ve enorme y poco amigable, descomponiéndola en términos resulta sencillo plantearla:

$$PSTGO^t \cdot \sum w_{i,STGO}^t$$

Ingreso por la venta en Santiago.

$$PEXP_1^t \cdot z_1^t + PEXP_2^t \cdot z_2^t$$

Ingreso total por la venta de exportaciones

$$\sum_i \sum_k CINV_{ik}^t \cdot x_{ik}^t$$

Costo Total de constrccion de plantas.

$$\sum_i \sum_k COPER_{ik}^t \cdot y_{ik}^t$$

Costo Total de producción

$$\sum_i \sum_j CTRANS_{ij}^t \cdot w_{ij}^t$$

Costo Total asociado al Transporte.

P3)

Ud. está a cargo de la logística de la repartición de las pruebas de la PSU. Suponga que cada día de la PSU se reparten las pruebas de ese día entre las 0 y las T horas de la mañana del mismo día. Dado que se opera con un sistema de arriendo de vehículos para la repartición de los enunciados, se desea realizar la labor con el mínimo de éstos. Por lo demás, la capacidad de cada vehículo es de s [pruebas], los que saldrán desde un único punto (nodo 0) hacia el conjunto de centros C donde se rinde la prueba. Cada uno de estos centros posee una demanda igual a d_c [pruebas] ($d_c \leq s$, $\forall c \in C$), los cuales deberán ser atendidos dentro de una ventana de tiempo entre l_c y u_c. Considere que el tiempo de viaje de un centro a otro es de t_{ij} , con $i,j \in C \cup \{0\}$, y que el tiempo en descargar las pruebas en cada centro es αd_c [horas] (las pruebas deben ser descargadas antes que u_c en cada centro c y todas deben haber sido descargadas antes del tiempo T).

Plantee el problema de optimización que represente este problema de ruteo de vehículos.

Suponga que la empresa de arriendo de vehículos dispone de un set K de éstos, además asuma

que un centro solo puede ser abastecido por un solo vehículo y que luego de vaciarse los camiones vuelven al lugar de origen (nodo 0)

Variables de Decisión:

Xijk=1 si el vehículo k va desde el cliente i al j.

1 sino

Wi=Tiempo en el cual se llega al centro i.

Función Objetivo: Dado que todos los vehículos salen del nodo 0, queremos minimizar la cantidad de ellos que salen desde el nodo 0 hacia algún lado, lo cual se plantea matemáticamente del siguiente modo:

$$\min \sum_{j \in C, k \in K} x_{0jk}$$

Restricciones:

a. Todos los centros son visitados:

$$\sum_{i \in C \cup \{0\}, k \in K} x_{ijk} = 1 \qquad \forall j \in C$$

b. Conservación de Flujo (todo lo que entra a un nodo, sale del nodo)

$$\sum_{i \in C \cup \{0\}} x_{ijk} = \sum_{i \in C \cup \{0\}} x_{jik} \qquad \forall j \in C, k \in K$$

c. Capacidad de los Vehículos:

$$\sum_{i \in C \cup \{0\}} x_{ijk} d_j \leq s \qquad \forall j \in C, k \in K$$

d. Tiempos de llegada (restricción de sub-tours):

$$w_j \geq w_i + t_{ij} + \alpha d_i + M(1 - \sum_{k \in K} x_{ijk}) \qquad \forall i \in C \cup \{0\}, j \in C$$

e. Respeto de ventanas de tiempo y horizonte de planificación:

$$l_i \leq w_i \leq u_i - \alpha d_i \qquad \forall i \in C$$
$$w_i + \alpha d_i \leq T \qquad \forall i \in C$$

f. Naturaleza de las variables:

$$x_{ijk} \in \{0,1\} \qquad \forall i, j \in C \cup \{0\}, k \in K$$
$$w_i \geq 0 \qquad \forall i \in C \cup \{0\}$$