IN3701: Modelamiento y Optimización

Guía de problemas resueltos de Programación Lineal

Recopilado por André Carboni E.[1]

Versión 1.2, Marzo 2010

[1] Cualquier comentario sobre esta guía o posibles errores de ortografía/resolución encontrados, por favor enviarlos a acarboni@ing.uchile.cl para su corrección en versiones futuras.

Palabras iniciales

Esta guía tiene como propósito entregar una serie de problemas resueltos de programación lineal (PPL), con el fin de que puedan estudiar y preparar de mejor forma sus controles de Modelamiento y Optimización (IN3701).

Se han seleccionado problemas de distinto nivel de dificultad, y se han tratado de ordenar según su nivel de dificultad, bajo el criterio totalmente subjetivo de quien escribe. Es indispensable para ustedes que resuelvan esta guía y entiendan cada uno de los problemas para estar bien preparados a la hora de resolver un control.

Noten que se han mantenido en varios problemas las notas y criterios de corrección, para que puedan hacerse una idea de cómo se corrigen. Además, en algunos problemas se han incluidos notas que explican los trucos más típicos a la hora de resolver un PPL.

Recuerden que cada control del curso contempla un problema de programación lineal, por lo que esta compilación de problemas les será útil a lo largo de todo el semestre. Si tienen consultas con respecto a la resolución de alguno de ellos, no duden en preguntarnos a través del foro del curso.

¡Éxito!

Problema 1

Un comerciante compra azúcar a granel y vende al detalle. Para venderla tiene dos alternativas: envases de 1 kg y envases de 5 kg. El precio de venta es $300 y $250 por kg respectivamente, y en el mercado del azúcar al detalle se pueden vender 20.000 kg en envases de 1 kg y 17.000 en envases de 5 kg.

Debido a un contrato anterior se deben entregar 5.000 kg en envases de 5 kg a un determinado cliente.

El comerciante se puede abastecer de azúcar desde dos proveedores. El primero le puede vender hasta 15.000 kg a un precio de $90 por kg, y el segundo le ofrece la cantidad de azúcar que el comerciante desee, pero a un precio de $110 por kg y debido a requerimientos de sus distribuidores el comerciante debe vender menos del tercio del azúcar en envases de 1 kg.

Además, suponga que el precio de los envases y el proceso de envasado son nulos, y que el comerciante no tiene azúcar almacenada y vende todo el azúcar que compra.

Formule un problema de programación lineal que permita al comerciante decidir cual es el plan de abastecimiento y ventas de modo de obtener el mayor beneficio en su negocio.

Solución problema 1

Variables de Decisión

X_1 = Cantidad de envases de un 1 kg que vende el comerciante.

X_2 = Cantidad de envases de un 5 kg que vende el comerciante.

Y_1 = Cantidad de azúcar que compra el comerciante al proveedor 1.

Y_2 = Cantidad de azúcar que compra el comerciante al proveedor 2.

Restricciones

1. Limite superior de la demanda:

Azúcar en envases de 1 kg: $X_1 \leq 20.000$

Azúcar en envases de 5 kg: $X_2 \leq \frac{22.000}{5}$

2. Satisfacer compromisos previos

$$X_2 \geq \frac{5.000}{5}$$

3. Venta máxima del proveedor 1

$$Y_1 \leq 15.000$$

4. Requerimientos de los distribuidores

$$X_1 \leq \frac{Y_1 + Y_2}{3}$$

5. No existe almacenamiento (o todo lo que se envasa se vende)

$$X_1 + 5 \cdot X_2 \leq Y_1 + Y_2$$

6. No negatividad

$$X_1, X_2, Y_1, Y_2 \geq 0$$

<u>Función Objetivo</u>

$$\max z = 300 \cdot X_1 + 1250 \cdot X_2 - 90 \cdot Y_1 - 110 \cdot Y_2$$

Problema 2

Los auxiliares de un curso de optimización de una universidad de gran prestigio, han decidido, para hacer un bien a los alumnos de su facultad, abrir una agencia de citas.

La cantidad de inscritos en la agencia es de M+N siendo M la cantidad de mujeres y N la cantidad de hombres. Se tiene, dadas las características demográficas de la facultad, que N>M.

Todos los inscritos se "ubican" entre ellos (solo de vista) y han informado confidencialmente a la agencia que la preferencia de una mujer m por emparejarse con un hombre n es de PMmn y la preferencia de un hombre n por emparejarse con una mujer m es de PHnm.

Adicionalmente a cada inscrito se le hace un test te personalidad y mediante un estudio, profundo y 100% certero, se determina si existirá compatibilidad entre cada combinación de parejas, obteniendo valores Cmn que serán 1 si la pareja del hombre n con la mujer m es compatible y 0 si la pareja no es compatible. Cada persona es compatible con al menos una pareja.

La agencia debe decidir a qué actividades enviar a cada pareja durante su cita (ej: ir al cine, a comer, etc) para esto la agencia cuenta con una variedad de A actividades y con un presupuesto fijo dado por PSPTO y se sabe que en cada actividad a la mujer m gastará Gma dependiendo del nivel de gasto al que esté habituado la mujer y se sabe que un hombre gasta Ka si realiza la actividad a, este gasto es igual para todos los hombres. Se tiene además que cada pareja no puede realizar más de tres actividades en su cita.

La preferencia de un hombre n por hacer la actividad a está dada por SHna y la preferencia de una mujer m por hacer la actividad a está dada por SMma.

Se sabe que una persona solo puede ser asignada una sola vez y que todas las mujeres deben tener pareja.

Los auxiliares del curso han decidido solicitar ayuda a sus alumnos pidiéndole a cada uno que formule un modelo de programación lineal entera para la primera ronda de citas, que maximice el nivel de satisfacción de preferencias.

Solución problema 2

Variables de Decisión:

X_{mn} = $\begin{cases} 1 \text{ Si se asigna la pareja del hombre n y la mujer m} \\ 0 \text{ Si no} \end{cases}$

Y_{mn} = $\begin{cases} 1 \text{ Si se asigna la actividad "a" a la pareja formada por el hombre n y la mujer m} \\ 0 \text{ Si no} \end{cases}$

Restricciones:

1.- A cada hombre se le asigna a lo más una mujer.

$$\sum_{m=1}^{M} X_{mn} \leq 1 \qquad \forall n = 1,\dots,N$$

2.- A cada mujer se le asigna exactamente un hombre.

$$\sum_{n=1}^{N} X_{mn} = 1 \qquad \forall m = 1,\dots,M$$

3.- No se asigna si no hay compatibilidad.

$$X_{mn} \leq C_{mn} \qquad \forall n = 1,\dots,N; m = 1,\dots,M$$

4.- Solo se puede tener actividades si se sale en la cita y las actividades no son más de tres.

$$\sum_{a=1}^{A} Y_{mna} \leq 3 \cdot X_{mn} \qquad \forall n = 1,\dots,N; m = 1,\dots,M$$

Esta restricción también se puede separa en estas dos restricciones:

$$Y_{mna} \leq X_{mn} \qquad \forall n = 1,\dots,N; m = 1,\dots,M; a = 1,\dots,A$$

$$\sum_{a=1}^{A} Y_{mna} \leq 3 \qquad \forall n = 1,\dots,N; m = 1,\dots,M$$

5.- No se pueden pasar del presupuesto para citas

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\sum_{a=1}^{A}\left[(G_{ma} + K_a) \cdot Y_{mna}\right] \leq PSPTO$$

6.- Naturaleza de las variables.

$$X_{mn}, Y_{mna} \in \{0,1\} \qquad \forall n = 1,\dots,N; m = 1,\dots,M; a = 1,\dots,A$$

Función Objetivo:

$$\max z = \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\left[(PM_{mn} + PH_{mn})\cdot X_{mn}\right] + \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\sum_{a=1}^{A}\left[(SH_{ma} + SM_{ma})\cdot Y_{mna}\right]$$

Problema 3

Nuestra amiga Thiarja Reca, reconocida coordinadora de un ramo de Optimización de una prestigiosa universidad, ha decidido al fin, tras largos años de expectación, historias y rumores, organizar el ya mítico "Asado optimizador". Thiarja cuenta con una lista de N posibles invitados a la fiesta, entre profesores, auxiliares, ayudantes y amigos varios del equipo

El centro de eventos donde se realizará el asado (la casa de uno de los ayudantes) le ha propuesto M posibles menús. Thiarja debe seleccionar el menú a servir en el asado (por ejemplo, choripanes, hamburguesas, etc), considerando que el mismo menú será servido a cada uno de los invitados, es decir, no habrá privilegios especiales para profesores o auxiliares, y que el costo de cada cena servida del menú m es PM_m. Si la persona i es invitada y el menú seleccionado es el m, éste consumirá LC_{im} litros de cerveza y LB_{im} litros de bebida. Se sabe que el litro de cerveza y bebida cuestan PLC y PLB respectivamente.

Adicionalmente, Thiarja cuenta con una reserva de RLC litros de cerveza y RLB litros de bebida que le han sobrado de su fiesta de cumpleaños, los cuales está dispuesta a donar para el asado, y cuenta con un presupuesto de P destinado a la realización del evento, dinero que fue otorgado por los generosos profesores.

Thiarja no invitará necesariamente a todos las personas de la lista para prevenir posibles problemas, incluso si esta persona es miembro del equipo de optimización. Por ello, debe considerar que:

- Un integrante que reciba una invitación asistirá con total seguridad al asado.
- En el caso de invitar a la persona i de la lista de posibles invitados, no será posible invitar a ninguna de sus antiguas parejas, con las cuales se mantienen diferencias irreconciliables. Este conjunto esta dado por E_i.
- En el caso de invitar a la persona i de la lista de posibles invitados, se deberá invitar forzosamente a cada una de las personas que el invitado i considera como mejores amigos. Este conjunto esta dado por A_i.
- Dentro de la lista de posibles invitados existe un conjunto de H parejas, razón por la cual, en el caso de extender una invitación a una persona casada, obligatoriamente la invitación debe ser extendida a su pareja. Considere que la pareja h esta formado por las personas h_1 y h_2 de la lista de invitados (es decir, las 2*H personas que están emparejadas están incluidas en la lista de potenciales invitados).

Tomando en cuenta todas estas consideraciones, ayude a Thiarja a formular el modelo de programación lineal mixto que le ayude a seleccionar el menú a servir en el asado y que le indique a qué personas invitar. Para esto, asuma que Thiarja desea invitar a la mayor cantidad de gente posible.

Solución problema 3

Variables:

$$Z_{im} = \begin{cases} 1 & \text{Si persona i es invitada cuando elegí menú m} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$W_m = \begin{cases} 1 & \text{Si elegí menú m} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$X_b =$ Litros de bebida a comprar

$X_c =$ Litros de cerveza a comprar

<u>Restricciones</u>:

1. Sólo escoge un menú:

$$\sum_m W_m = 1$$

2. Relación entre variables (sólo invito a una persona bajo el menú m si elegí el menú m):

$$Z_{im} \leq W_m \qquad \forall i, m$$

3. Compro bebida y cerveza sólo si me falta:

$$X_b \geq \sum_{i,m} Z_{im} * LB_{im} - RLB$$
$$X_c \geq \sum_{i,m} Z_{im} * LC_{im} - RLC$$

4. No sobrepasar el presupuesto:

$$\sum_{i,m} Z_{im} * PM_m + X_b * PLB + X_c * PLC \leq P$$

5. Si invito a persona i, no invito a sus ex parejas:

$$Z_{im} \leq (1 - Z_{jm}) \qquad \forall j \in E_i \;\; \forall i, m$$

6. Si invito a i, debo invitar a sus mejores amigos:

$$Z_{im} \leq Z_{jm} \qquad \forall j \in A_i \;\; \forall i, m$$

7. Si invito a un casado, invito a su pareja:

$$Z_{im} = Z_{jm} \qquad \forall (i, j) \in (h_1, h_2) \;\; \forall i, m$$

8. Naturaleza de las variables:

$$Z_{im} \in \{0,1\}, \quad W_m \in \{0,1\} \qquad \forall i, m$$
$$X_b \geq 0, \qquad X_c \geq 0 \qquad \forall b, c$$

Función objetivo:

$$\max \sum_{i,m} Z_{im}$$

Problema 4

Considere el problema de la empresa Marime:

El alto mando de Marime está pensando en abrir una empresa. Para lo anterior sabe que tiene P sitios en donde puede construir una planta productora, y B sitios en donde puede construir una bodega para almacenar sus productos. Además tiene un abanico de N productos que produce y comercializa.

Se sabe que la demanda por cada producto n es D_n, en el periodo único de tiempo a considerar, y ha estimado que la pérdida por no satisfacer la demanda de un producto es A_n por cada unidad no satisfecha.

Sabe además que los costos de abrir una planta y una bodega son P_p y B_b, respectivamente, y los costos por producir y almacenar una unidad de producto son H_{pn}, K_{bn}, respectivamente. Se estimó que el costo de transporte entre planta y bodega es despreciable. Suponga que las capacidades de producción y bodegaje son CP_p y CB_b, respectivamente, y asuma que todo se produce al inicio del periodo, luego se almacena y se vende al final de este.

Dadas las condiciones de cada terreno, el gerente de operaciones de la empresa sabe que no todos los productos pueden ser almacenados en cualquier bodega, ni producidos en cualquier planta. Luego de un estudio profundo encontró que la factibilidad de producir un producto n en una determinada planta p esta dada por C_{pn}, y la de almacenar un producto n en una determinada bodega b está dada por E_{bn}.[2]

Sabiendo que la empresa puede vender cada unidad de producto n en U_n, y considerando que el cliente compra el producto directamente desde la bodega, construya un Problema de Programación Lineal Mixta que permita a Marime maximizar sus utilidades.

Solución problema 4

Variables de Decisión:

$$X_b \begin{cases} 1 \text{ si se construye la bodega b} \\ 0 \text{ si no} \end{cases}$$

$$Y_p \begin{cases} 1 \text{ si se construye la planta p} \\ 0 \text{ si no} \end{cases}$$

V_{pn} = Cantidad a producir del producto n en planta p.

Q_{bn} = Cantidad a almacenar del producto n en bodega b.

R_n = Cantidad de demanda insatisfecha.

[2] Los parámetros toman el valor 1 si se puede realizar la operación y cero sino.

Restricciones:

1.- Sólo se puede producir en p si la planta está construida y es compatible.

$$V_{pn} \leq CP_p \cdot Y_n \cdot C_{pn} \qquad \forall n = 1,...,N;\ p = 1,...,P$$

2.- Sólo se puede almacenar en b si la bodega está construida y es compatible

$$Q_{bn} \leq CB_b \cdot X_{bn} \cdot E_{bn} \qquad \forall n = 1,...,N; b = 1,...,B$$

3.- Cantidad de demanda insatisfecha:

$$R_n \geq D_n - \sum_{p=1}^{P} V_{pn} \qquad \forall n = 1,...,N$$

4.- Lo producido por sobre la demanda se va a bodega:

$$\sum_{b=1}^{B} Q_{bn} \geq \sum_{p=1}^{P} V_{pn} - D_n \qquad \forall n = 1,...,N$$

5.- Naturaleza de las variables.

$$X_b, Y_p, \in \{0,1\} \qquad \forall n = 1,...,N; b = 1,...,B;\ p = 1,...,P$$

$$\mathrm{V_{np}}, \mathrm{Q_{np}}, \mathrm{R_n} \geq 0 \qquad \forall n = 1,...,N;\ p = 1,...,P$$

Función Objetivo:

$$\max z = \sum_{p=1}^{P}\sum_{n=|}^{N} U_p \cdot V_{pn} - \sum_{p=1}^{P}\sum_{n=1}^{N} H_{pn} \cdot V_{pn} - \sum_{b=1}^{B}\sum_{n=1}^{N} Q_{bn} \cdot K_{bn} - \sum_{n=1}^{N} R_n \cdot A_n - \sum_{b=1}^{B} B_b \cdot X_b - \sum_{p=1}^{P} P_p \cdot Y_p$$

Algunas notas con respecto a este problema:

El hecho de considerar un sólo período hace que sea inútil enviar unidades a bodega:

- *En caso de no poder satisfacer la demanda, entonces obviamente no enviaremos unidades a bodega (todo lo producido será vendido).*

- *En caso de poder producir más que la demanda (* $D_n \leq \sum_{p=1}^{P} V_{pn}$ *) el programa de todas formas decidirá producir exactamente lo demandado, ya que las unidades adicionales serían enviadas a bodega, pero con esto solo se incurre en un costo (costo de producción y bodegaje) y ningún beneficio (debido a que estamos mirando sólo un período de tiempo).*

Por otro lado, en un problema donde se consideran varios períodos de tiempo, hace falta ir actualizando el inventario período a período en una restricción adicional (en palabras, caso sin demanda insatisfecha: "el inventario en t es igual al inventario *en t-1 más lo producido en t menos lo demandado en t". Para ver ejemplo con demanda insatisfecha, ver problema 5).*

Problema 5

La empresa de pigmentos LILLO & Co. debe decidir cada día qué pigmento producir en su única máquina, eligiendo dentro del conjunto de I pigmentos que comercializa.

Por razones técnicas puede producir como máximo un tipo de pigmento por día, en cada uno de los t días de su horizonte de planificación modelado por el conjunto T, ya que sólo se puede hacer un set-up diariamente. El set-up consiste en ajustar la máquina para producir un pigmento especifico, si se sigue produciendo el mismo pigmento que el día anterior no es necesario realizar el set-up nuevamente.

Además, debe mantener la máquina funcionando todos los días en el horizonte de planificación para evitar fallas de funcionamiento. Para efectos de modelamiento se puede considerar el caso en que no está produciendo ningún pigmento diciendo que está produciendo el producto ficticio 0. La capacidad de producción de la máquina es muy superior a la demanda estimada para cualquier pigmento, por lo que no es considerada una restricción relevante.

Para cambiar de pigmento se debe pagar un costo de set-up cij que depende de los pigmentos i y j involucrados, ya que no es lo mismo cambiar entre pigmentos claros, oscuros, etc. Para efectos de modelamiento puede considerar que existe el costo cii = 0 $\forall i \in I$, y que en el periodo ficticio 0 del horizonte de evaluación la máquina estaba funcionando sin producir ningún pigmento. La demanda diaria para el pigmento i en el día t del horizonte de planificación ha sido estimada por el departamento de marketing en dit, y debe ser satisfecha durante el horizonte de planificación T, es decir, se permiten atrasos en la satisfacción de la demanda así como producir con anticipación algún pigmento en caso de ser necesario.

Los costos asociados a cada una de estas situaciones son bi por unidad y día de atraso del pigmento i, costo definido por las penalizaciones por atrasos fijadas por contrato con los clientes más una estimación del costo asociado a la pérdida de confianza de parte de los clientes. Y un costo hi por cada día y unidad de inventario almacenada del pigmento i (bi >> hi $\forall i \in I$), costo definido por los costos de almacenamiento y de operación de la bodega.

Considere que el stock inicial y la demanda adeudada inicial de todos los pigmentos son nulos. Para efectos de modelamiento considere que la demanda diaria y atrasada de cada pigmento se satisface instantáneamente, y sin costo de distribución relevante, al final de cada día en función de la cantidad producida y almacenada hasta el momento.

Modele el problema de producción de la empresa como un problema de programación lineal mixto, donde se asegura la satisfacción de la demanda a lo largo del horizonte de planificación minimizando los costos de set-up, y los costos por atrasos y por almacenamiento de productos en bodega.

Solución problema 5

<u>Variables de decisión</u> (1 pto.):

x_{it}: Cantidad que se produce del pigmento i en el periodo t.

s_{it}: Cantidad que se almacena del pigmento i al final del periodo t.

r_{it}: Demanda adeudada del pigmento i al final del periodo t.

y_{it}: Toma valor 1 si se produce el pigmento i en el periodo t. 0 en otro caso.

w_{ijt}: Toma valor 1 si se cambia del pigmento i al pigmento j al comienzo del periodo t.

Restricciones:

1. (0.6 ptos.) Naturaleza de las variables:

$$y_{it}, w_{ijt} \in \{0,1\} \qquad \forall i, j \in I, t \in T$$
$$x_{it}, s_{it}, r_{it} \geq 0 \qquad \forall i \in I, t \in T$$

2. (0.6 ptos.) Siempre mantener la máquina funcionando y sólo utilizar un pigmento por día

$$\sum_i y_{it} = 1 \qquad \forall t \in T$$

3. (0.6 ptos.) El stock y deuda inicial es cero

$$s_{i0} = 0 \qquad \forall i \in I$$
$$r_{i0} = 0 \qquad \forall i \in I$$

4. (0.6 ptos.) Relación entre las variables

$$x_{it} \leq y_{it} \cdot \sum_t d_{it} \qquad \forall i \in I, t \in T$$
$$x_{i0} = 0 \qquad \forall i \in I$$

5. (0.6 ptos.) Definición de w_{ijt}

$$w_{ijt} \geq y_{i(t-1)} + y_{jt} - 1 \qquad \forall i, j \in I, i \neq j \quad \forall t \in T, t \neq \{0\}$$

6. (0.5 ptos.) Conservación del flujo

$$s_{i(t-1)} + x_{it} + r_{it} = d_{it} + r_{i(t-1)} + s_{it} \qquad \forall i \in I, \quad \forall t \in T, t \neq \{0\}$$

7. (0.5 ptos.) Satisfacer de la demanda a lo largo del horizonte de planificación

$$r_{iT} = 0 \qquad \forall i \in I$$

Función Objetivo (1 pto.)

$$\min \sum_{i,t} h_i s_{it} + \sum_{i,t} b_i r_{it} + \sum_{i,j,t} c_{ij} w_{ijt}$$

Problema 6

El conocido magnate Leonardo Arcas ha decidido mostrar al mundo su talento musical, y para ello, va a presentarse en un prestigioso certamen internacional. Lo más importante para él es la admiración del público, la cual se mide en aplausos.

Para su presentación, el señor Arcas debe decidir qué instrumentos usar y por cuánto tiempo tocará cada uno, ya que sólo tiene T minutos para estar sobre el escenario. En su mansión posee N instrumentos y sabe que para cada instrumento i tiene un talento d_i [u.t.] (unidades de talento) del mismo. Además, debe tocar al menos K instrumentos distintos, dada su auto-denominación de "hombre orquesta". El multimillonario también tiene la opción de cantar, aunque para ello no tiene talento.

El público se divide en J sectores, cada uno de los cuales tiene distintas preferencias musicales. Lo anterior se traduce en que cada sector j se deleita en g_{ij} [u.s.] (unidades de satisfacción) por oír tocar el instrumento i, y en g_j [u.s.] por oír cantar. Sin embargo, en cada sector hay personas impacientes que generarán p_{ij} pifias por cada minuto que oigan el instrumento i y p_j pifias por cada minuto que oigan cantar. Suponga que cada pifia descuenta un aplauso, es decir, se miden en las mismas unidades. Leonardo no puede permitir que el total de pifias supere el nivel P, ya que esto afectaría irremediablemente su popularidad.

Cada sector j del público emitirá una cantidad de aplausos equivalente a su deleite por oír tocar cada instrumento (o el canto), independiente de su duración, y una cantidad equivalente al talento del artista en tal instrumento (o el canto) por cada minuto que dure.

Como a Leonardo Arcas le interesa su popularidad en cada sector del público, él desea maximizar la mínima cantidad de aplausos obtenida entre todos los sectores. Plantee un modelo de programación lineal que permita al acaudalado personaje tomar las mejores decisiones para lograr su objetivo.

Solución problema 6

<u>Variables de Decisión</u>

$$x_i = \begin{cases} 1 & si\ toca\ el\ instrumento\ i \\ 0 & si\ no \end{cases}$$

$$y_i = \min utos\ que\ toca\ instrumento\ i$$

$$x = \begin{cases} 1 & si\ canta \\ 0 & si\ no \end{cases}$$

$$y = \min utos\ que\ canta$$

$$A = cantidad\ mínima\ de\ aplausos\ entre\ todos\ los\ sectores\ del\ público$$

<u>Restricciones:</u>

1. No sobrepasar el tiempo:

$$\sum_i y_i + y \le T$$

2. Hombre orquesta:

$$\sum_i x_i \ge K$$

3. Relación entre variables:

$$y_i \le x_i \cdot T \quad \forall i$$
$$y \le x \cdot T$$

4. Máximo de pifias:

$$\sum_j \left(\sum_i (p_{ij} \cdot y_i) + p_j \cdot y \right) \le P$$

5. Definición de A:

$$A \le \sum_i \left(g_{ij} \cdot x_i + (d_i - p_{ij}) \cdot y_i\right) + g_j \cdot x - p_j \cdot y \quad \forall j$$

6. Naturaleza de las Variables:

$$y_i \ge 0 \quad \forall i$$
$$y \ge 0$$
$$x_i \in \{0,1\} \quad \forall i$$
$$x \in \{0,1\}$$
$$A \in R$$

<u>Función Objetivo</u>:

$$Max\ A$$

Nota: En este problema se pide "maximizar el mínimo" de algo. Sin embargo, en un PPL no podemos poner max{min{...}} en la función objetivo, pues esto no es lineal. Para solucionar esto, se agrega la restricción 5, que "minimiza" el valor de A y luego se maximiza A (¡truco típico!).

En la restricción 5, la variable "A" es menor o igual que los aplausos en cada uno de los sectores. En otras palabras, "A" es menor o igual que el sector que dio la MENOR cantidad de aplausos. Luego, al maximizar A, estamos maximizando la cantidad de aplausos que da el sector que da menos aplausos, que es lo que nos piden.

Problema 7

El recién electo presidente de Estados Juntos, Baraki Obamu, ha decidido reestructurar la localización de los colegios en el estado de Mazachuset.

N es el conjunto de ciudades que hay que considerar; el subconjunto C de N contiene las ciudades donde puede haber un colegio (en una ciudad puede haber máximo un colegio).

C1 es el subconjunto de C donde ya existe un colegio.

En la ciudad i hay Ei estudiantes que tienen que ir a un colegio. Ningún estudiante puede viajar más de L kms. Dij es la distancia en kms entre las ciudades i y j; i,j$\in$ N (se puede asumir Dii=0).

Los colegios existentes (colegio tipo 1) tienen una capacidad para E estudiantes. Hay un nuevo tipo de colegio (colegio tipo 2) que tiene capacidad para EM estudiantes (E<EM).

El costo para construir un colegio del tipo t es de Ct UM (unidades monetarias), t=1,2. Se pueden construir colegios tipo 1 ó 2. El costo para cerrar un colegio existente es de CE UM.

Para la reestructuración de los colegios hay un presupuesto de PPTO UM.

Plantee un PPL que determine dónde cerrar y dónde construir colegios y que además asigne a los estudiantes a un colegio.

Suponga como función objetivo la minimización del costo total de la reestructuración.

¿Cómo cambia el modelo si en vez de minimizar el costo total se quiere minimizar la distancia total que tienen que viajar todos los alumnos?

Solución problema 7

Variables de decisión:

$x_i = \begin{cases} 1 \text{ si mantengo el colegio i abierto} & i \in C1 \\ 0 \text{ caso contario} & \end{cases}$

$y_{it} = \begin{cases} 1 \text{ si construyo colegio del tipo t en i} & i \in C \\ 0 \text{ caso contario} & \end{cases}$

$z_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si asigno alumnos de i al colegio ubicado en j} & i \in N \quad j \in C \\ 0 \text{ caso contario} & \end{cases}$

$w_{ij} =$ número de alumnos de i que asigno a colegio ubicado en j   i$\in$ N   j$\in$ C

Restricciones

1. Naturaleza de las variables

$$x_i, y_{it}, z_{ij} \in \{0,1\}$$

$$w_{ij} \in \mathrm{N}$$

2. Asigno si la distancia lo permite

$$z_{ij} \leq \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{D_{ij}}} \qquad \forall i, j$$

3. Relaciones entre variables de asignación

$w_{ij} \leq z_{ij} \cdot M \qquad \forall i, j$, M >> 0, por ejemplo Ei

4. Todos los estudiantes son asignados

$$\sum_{j} w_{ij} = E_i \qquad \forall i$$

5. Para asignar el colegio debe existir

$$z_{ij} \leq y_{j1} + y_{j2} + x_j \qquad \forall i, j \in C1$$

$$z_{ij} \leq y_{j1} + y_{j2} \qquad \forall i, j \in C / C1$$

NOTA: hay distintas formas de trabajar el hecho de que sólo se pueden cerrar colegios que ya existen, por ejemplo, también se puede definir la variable $x_i \quad i \in C$ *y hacer* $x_i = 0 \quad \forall i \notin C1$ *y luego tener cuidado con las sumatorias que involucran costos. (si se hace esto último hay restricciones que no son necesarias de escribir 2 veces)*

6. Capacidad de los colegios

$$\sum_{i} w_{ij} \leq y_{j1} \cdot E + y_{j2} \cdot EM + x_j \cdot E \qquad \forall i, j \in C1$$

$$\sum_{i} w_{ij} \leq y_{j1} \cdot E + y_{j2} \cdot EM \qquad \forall i, j \in C / C1$$

7. Colegios

$$y_{j1} + y_{j2} + x_j \leq 1 \qquad \forall i, j \in C1$$

$$y_{j1} + y_{j2} \leq 1 \qquad \forall i, j \in C / C1$$

8. Presupuesto

$$\sum_{jt \in C} y_{jt} C_t + \sum_{j \in C1} (1 - x_j) \cdot CE \leq PPTO$$

<u>Función Objetivo</u>

$$\min\{\sum_{jt\in C} y_{jt} C_t + \sum_{j\in C1} (1-x_j)\cdot CE\}$$

Función Objetivo alternativa

$$\min \sum_{i\in N,\, j\in C} w_{ij} D_{ij}$$

Problema 8

La reconocida empresa CCC (Compañía de Cervezas Carboni), debido al aumento sostenido de la demanda de cerveza en los últimos años, desea evaluar la instalación de nuevas plantas de malta. Para ello, el gerente de operaciones de la compañía le explica a usted, brevemente, el proceso productivo de la cerveza.

Existen en la región una serie de plantaciones de cebada, propiedad de la compañía, de las que se extrae y transporta cebada a alguna de las plantas de malta de la empresa. Además, existe una pequeña fracción de cebada que es importada y llevada directamente a las plantas. La cebada es procesada en esta planta, produciendo la malta. Ésta es luego transportada desde la planta a la cervecería, donde se termina de producir la cerveza, o bien es exportada.

Existe un conjunto J de posibles localizaciones para las plantas, de las cuales un subconjunto J_A ya está ocupado por las plantas actuales. Considere que, como máximo, puede instalarse sólo una planta de malta por año y que el horizonte de tiempo para el problema es de T años ($|J \backslash J_A| > T$).

Considere que existe un conjunto I de proveedores de cebada (donde i=1 corresponde a las importaciones y el resto a las plantaciones) y un conjunto K de puntos de demanda de malta (donde k=1 corresponde a las exportaciones y el resto a cervecerías). Cada uno de estos puntos demanda una cantidad D_{kt} de malta en el año t.

Cada proveedor de cebada (incluyendo importaciones) puede ofertar como máximo A_{it} toneladas de cebada en el año t y la capacidad de producción de la planta de malta en la ubicación j es C_j cada año. Es importante considerar que no toda la cebada es utilizable para producir malta, debido a los altos estándares de calidad de la compañía. Estudios preliminares han identificado la calidad de la cebada en las distintas plantaciones, por lo que se ha estimado el parámetro r_i, que corresponde a la cantidad de malta que se puede producir con una tonelada de cebada de la plantación i.

Los costos se han estimado previamente, siendo a_{ijt} el costo de transporte de cebada de la plantación i a la planta de malta j en el año t, m_{jkt} el costo de transportar malta de la planta j al punto de demanda k en el año t y sjt el costo fijo por instalar una planta de malta en j en el año t.

Por último, por políticas de la empresa, considere que la cantidad de cebada importada debe corresponder a una proporción fija de la cantidad de malta exportada. Así, las toneladas de cebada importada no pueden ser menores al 80% ni mayores al 120% de las toneladas de malta exportada.

Plantee un modelo de programación lineal mixta, que permita decidir dónde instalar las nuevas plantas de malta y en qué año hacerlo, de modo de minimizar los costos totales en el horizonte de tiempo especificado y satisfaciendo la demanda en cada período. Para simplificar, considere que los efectos inflacionarios ya están considerados en los costos entregados.

Solución Problema 8

Variables:

$$Z_{jt} = \begin{cases} 1 & \text{Si está instalada la planta de malta en la ubicación j en el año t} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$X_{ijt} =$ Toneladas de cebada transportadas desde la plantación i a la planta j en el año t.

$Y_{jkt} =$ Toneladas de malta transportadas desde la plantación j al punto de demanda k en el año t.

¡OJO! La variable Zjt Vale 1 desde el momento en que se construye la fábrica hasta el final (es decir, si construyo en t=3, Zij={0,0,1,1,1,1,1....}). Esto se logra definir así gracias a la restricción 4. ¿Por qué se definió así? Pues simplemente porque facilita un par de restricciones. También se podría definir de la forma típica (vale 1 sólo en el momento en que se construye), pero habría que modificar las restricciones.

Restricciones:

1) Satisfacer demanda:

$$\sum_j Y_{jkt} \geq D_{kt} \qquad \forall k,t$$

2) Cebada necesaria para producir malta:

$$\sum_k Y_{jkt} \leq \sum_i r_i * X_{ijt} \qquad \forall j,t$$

3) Capacidad de las plantas:

$$\sum_k Y_{jkt} \leq C_j \qquad \forall j \in J_A, t$$

$$\sum_k Y_{jkt} \leq C_j * Z_{jt} \qquad \forall j \in J \setminus J_A, t$$

Nota: Es esta restricción la que nos "obliga" a definir Zjt de la forma antes mencionada, ya que si no valiera 1 desde que se construye hasta el final, tendríamos problemas en los períodos posteriores a la construcción de la planta (por ejemplo, si construyo en t=3 entonces Zj3=1, pero si estamos ahora en t=4, Zj4 valdría cero y obligaríamos a que Yjkt=0). Igual existen formas de arreglar este problema (mediante el uso apropiado de sumatorias), pero preferí modelar el ppl de esta forma porque es un truco útil de saber ;).

4) Una vez que se abre la planta, esta permanece abierta:

$$Z_{jt} \leq Z_{jt+1} \qquad \forall j \in J \setminus J_A, t < T$$

5) Capacidad de producción de cebada:

$$\sum_j X_{ijt} \leq A_{it} \qquad \forall i,t$$

6) Una planta de malta por año como máximo:

$$\sum_{j \in J \setminus J_A} (Z_{jt} - Z_{jt-1}) \leq 1 \qquad \forall t$$

Nota: Como Zjt vale 1 desde que construí hasta el final, al escribir de esta forma la restricción estamos considerando sólo 1 vez la construcción de la planta. Si no lo escribiéramos así y pusiéramos sólo la sumatoria de Zjt, tendríamos la suma de muchos 1's... ¡Prueben con números para la variable Z y vean que funciona! Por ejemplo si j=1, y Z1t={0,0,1,1,1} para t={1,...,5}, entonces (Z_{jt}-Z_{jt-1}) = (0-0) + (0-0) + (1-0) + (1-1) + (1-1) = 1. Se considera una sola vez la construcción de la planta ;).

7) Cebada importada proporcional a malta exportada:

$$0{,}8 * \sum_j Y_{j1t} \leq \sum_j X_{1jt} \leq 1{,}2 * \sum_j Y_{j1t} \qquad \forall j,t$$

8) Condición de borde:

$$Z_{j0} = 0 \qquad \forall j \in J \setminus J_A$$

9) Naturaleza variables:

$$X_{ijt} \in \Re, Y_{jkt} \in \Re \ , Z_{jt} \in \{0,1\} \qquad \forall i, j, t$$

<u>Fn. Objetivo</u>:

$$\min\{\sum_{i,j,t} a_{ijt} * X_{ijt} + \sum_{j,k,t} m_{jkt} * Y_{jkt} + \sum_{t, j \in J \setminus J_A} s_{jt} * (Z_{jt} - Z_{jt-1})\}$$

Problema 9

Usted está tratando de ganarse una "luquitas extras" y es por ello que está con 2 trabajos. El primero es de repartidor y el segundo es de garzón. Sobre el primero, este tiene las siguientes características: Cada mañana usted llega a la bodega central a buscar los paquetes que debe repartir a lo largo de S sitios. Al final de la jornada usted debe volver a la bodega central. Para poder llevar a cabo de buena forma todas sus actividades, dispone de H unidades de tiempo para hacer este trabajo. El tiempo que demora en ir de un sitio a otro o desde la bodega a un sitio o de un sitio a la bodega es t_{ij} (considere la bodega como el sitio 0). Es posible que usted no alcance a llegar a todos los sitios dentro de las H horas, en tal caso usted posee 2 alternativas. La primera es no ir a ese (esos) lugar(es) lo que le significa una disminución en su sueldo, dicha disminución depende del sitio que no visitó, si no fue al sitio s ($s \in S$) la merma de sueldo equivale a P_s. O usted puede visitarlos, pero cada unidad de tiempo que sigue trabajando como repartidor le significa una disminución de P unidades de su sueldo como garzón. Además usted sabe que si llega muy tarde a la "pega" de garzón lo pueden despedir y como usted no quiere que esto ocurra, como máximo seguirá trabajando como repartidos HH unidades de tiempo por sobre las H establecidas.

Su misión ahora, es realizar un PPL que le permita decidir su recorrido a través de los sitios, respetando las restricciones antes planteadas. No está demás decir, que usted desea que sus ingresos se vean penalizados de la menor forma posible. Recuerde que usted no va a visitar necesariamente todos los sitios.

Solución problema 9

Variables de decisión

xij: 1 si va de sitio i a sitio j. 0 en caso contrario

T: unidades de tiempo extra que trabaja como repartidor

Restricciones

1. Naturaleza de las variables

$$xij \in \{0,1\},\ T \in \text{ reales positivos}$$

2. Sale de la bodega

$$\sum_j X_{0j} = 1$$

3. Regresa a la bodega

$$\sum_j X_{i0} = 1$$

4. Tiempo de trabajo

$$\sum_{i,j} X_{ij} t_{ij} \leq H + T$$

5. Si se entra a un lugar se sale de él. Si no se entra no se debe poder salir porque nunca se entro.

$$\sum_i X_{ij} = \sum_i X_{ji} \qquad \forall j$$

6. Entro a un lugar máximo una vez

$$\sum_i X_{ij} \leq 1 \quad \forall j$$

7. Salgo a lo más una vez de un lugar

$$\sum_j X_{ij} \leq 1 \qquad \forall i$$

(Esta última restricción no es necesaria porque se tiene implícita con las otras 2 de más arriba (restricciones 5 y 6). También se podría omitir la restricción 6 si se escribe la 5 y la 7.

8. No se puede entrar al mismo lugar que donde uno esta

$$X_{ii} = 0 \qquad \forall i$$

(Esta restricción se podría omitir trabajando los sumandos de las sumatorias apropiadamente, usando "i distinto de j").

9. Límite de tiempo extra que se sigue trabajando como repartidor

$$T \leq HH$$

11. Evitar Sub-tours

$\sum_{i,j \in U} X_{ij} \leq |U| - 1$ $\forall$ U tal que 2≤|U|≤S-2, U $\subseteq$ sitios que no incluye la bodega.

o bien:

$\sum_{i,j \in U} X_{ij} \leq |U| - 1$ $\forall$ U tal que 2≤|U|≤S-2, con U $\subseteq$ sitios + la bodega.

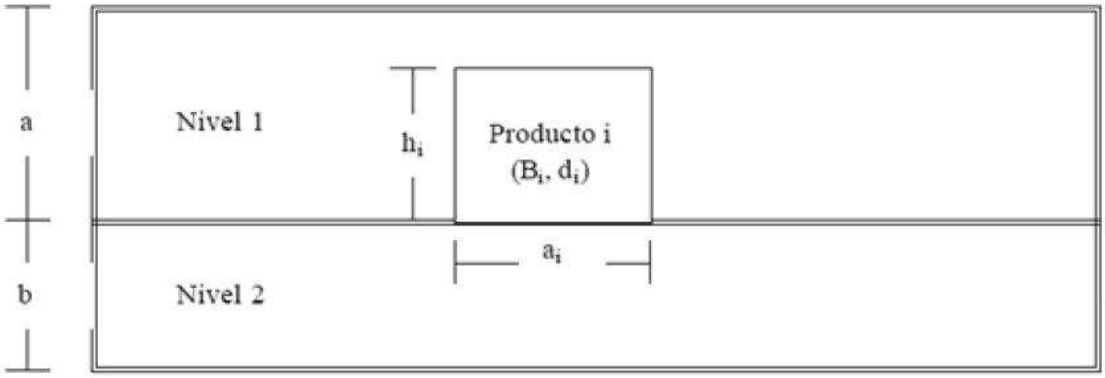
<u>Función Objetivo</u>

$$\min\{\sum_i P_i \cdot (1 - \sum_j X_{ij}) + P \cdot T\}$$

Problema 10

Considere que debe definir el contenido diario de las góndolas de un supermercado decidiendo los productos que debe incluir en ella. Para ello usted sabe que la góndola tiene 2 niveles (ver figura), cada uno de un alto a y b centímetros, respectivamente. Además, ambos niveles tienen un ancho de L cm. y una distancia de fondo de P cm.

Por otro lado usted cuenta con I tipos de productos distintos, los cuales tienen cada uno un cierto alto, ancho y fondo, los que se denotan por hi, ai y pi con $i \in \{1, \dots, n\}$, respectivamente. Cada producto puede estar presente sólo en uno de los dos niveles, y por razones de exposición de la marca sólo se pueden exponer apoyados en el ancho como se muestra en la figura. Obviamente existen productos más rentables que otros, por lo cual cada producto tiene un beneficio neto unitario Bi > 0, el cual incluye todos los beneficios y costos asociados a la venta de una unidad de producto i.



Adicionalmente se requiere que exista un mínimo de MINi unidades de cada producto en las góndolas de modo de garantizar una variedad y disponibilidad adecuada hacia los clientes, y se debe considerar que la cantidad que existe en la bodega del supermercado de cada producto es BODi. Considere que por tratarse del problema diario de ubicación de productos en la góndola, no se alcanza a solicitar y recibir productos adicionales a las existencias en bodega, y para efectos de modelamiento suponga que no hay reposición de productos durante el día.

Suponga que todo lo que se coloca en la góndola se vende, hasta un límite que ha sido estimado por el departamento de marketing para cada producto en DMAXi, y que no se puede poner un producto distinto detrás de otro ni tampoco sobre otro. Por acuerdos comerciales con dos de los grandes productores de alimentos de lujo del país, los productos 1 y 2 deben estar en niveles distintos de la góndola en caso de exhibirse. Por otro lado, los productos 3 y 4 se venden en una oferta de pack, por lo que deben exponerse en el mismo nivel de la góndola.

Por acuerdos comerciales con la multinacional Lillo & Gamble, al considerar tres productos cualquiera del conjunto LG de sus productos al menos uno de ellos debe estar expuesto en el nivel superior. Plantee un modelo de programación lineal entero mixto que permita encontrar la asignación de máximo beneficio de los distintos productos a la góndola teniendo en cuenta las características físicas de cada producto y de la góndola.

Solución problema 10

Variables de decisión (0.8 ptos):

Xij := Unidades del producto i incluidas en el nivel j

Zij := Corridas del producto i incluidas en el nivel j

Yij := $\begin{cases} 1 & \text{Si el producto i se expone en el nivel j} \\ 0 & \text{Sino} \end{cases}$

Restricciones (0.4 ptos c/u):

1. Naturaleza de las variables

$$X_{ij} \in N_0^+, Z_{ij} \in N_0^+, Y_{ij} \in \{0,1\}$$

2. Cada producto puede estar presente solamente en un nivel de la góndola:

$$\sum_{i} Y_{ij} \leq 1 \qquad \forall i \in \{1,...,n\}$$

3. Definición de zij y ancho de la góndola no debe ser superado:

$$Z_{ij} \geq X_{ij} \cdot \frac{p_i}{P} \qquad \forall i \in \{1,...,n\}, \forall j \in \{1,2\}$$

$$\sum_{i} Z_{ij} a_i \leq L \qquad \forall j \in \{1,2\}$$

4. Altura de cada nivel de la góndola no debe ser superada por la altura de ninguno de los productos asignados a ese nivel:

$$h_i \leq a + M(1 - y_{i1}) \qquad \forall i \in \{1,...,n\}, M >> 1$$

$$h_i \leq b + M(1 - y_{i2}) \qquad \forall i \in \{1,...,n\}, M >> 1$$

Nota: A esto se le conoce como "el truco de la gran M" y es muy habitual. Notar que si Y_{i2} vale 1 (el producto se expone en el nivel 2), h_i es menor o igual que "b" (la altura del nivel 2). En cambio, si Y_{i2} vale cero (el producto no se expone en el nivel 2), h_i es menor o igual que b+M con M tan grande como se quiera, por lo que es como si esta restricción no existiera. Es decir, M se elije tal que no afecte al valor de h_i para este caso, lo que tiene sentido pues si el producto no se pone en el nivel 2, "no importa" el tamaño del producto.

5. Consistencia en la definición de y_{ij} :

$$X_{ij} \leq M \cdot Y_{ij} \qquad \forall i \in \{1,...,n\}, \forall j \in \{1,2\} \ , M >> 1$$

6. Respetar la cantidad en bodega:

$$\sum_{j} X_{ij} \leq BOD_i \qquad \forall i \in \{1,...,n\}$$

7. Cantidad máxima que se puede vender:

$$\sum_{j} X_{ij} \leq DMAX_i \qquad \forall i \in \{1,...,n\}$$

8. Satisfacción de variedad y disponibilidad mínima:

$$\sum_{j} X_{ij} \geq MIN_i \qquad \forall i \in \{1,...,n\}$$

9. Los productos 1 y 2 deben exponerse en distintos niveles, en caso de exhibirse:

$$Y_{1j} + Y_{2j} \leq 1 \qquad \forall j \in \{1,2\}$$

10. Los productos 3 y 4 deben exhibirse en el mismo nivel de la góndola:

$$Y_{3j} = Y_{4j} \qquad \forall j \in \{1,2\}$$

11. De cada tres productos en LG al menos uno debe exponerse en el nivel superior:

$$\sum_{i \in S} X_{i1} \geq 1 \qquad \forall S \subset LG, |S| = 3$$

Función Objetivo (0.8 ptos):

$$\max \sum x_{ij} B_i$$

Problema 11

El exitoso director técnico nacional, Miguel Tenderini, ha sido contratado por el prestigioso equipo de hándbol Real Mandril, el cual cuenta con un conjunto N de jugadores, todos estelares. Se le ha encomendado la misión de escoger las contrataciones para la próxima temporada de entre un conjunto M de posibles jugadores, cada uno de los cuales tiene un precio p_i con $i \in \{N+1, \ldots, M\}$, y para ello se le ha otorgado un presupuesto de PPTO euros.

La temporada se compone de J partidos, en cada uno de los cuales, Tenderini debe decidir el conjunto jugadores que participará de él, tanto como titular o como suplente, suponga que debe haber T titulares y B suplentes por partido. Se sabe que g_{ij}^k es la cantidad de goles que anotará el jugador i en el partido j si entra como k (con $k \in \{Titular, Suplente\}$). Suponga que todos los suplentes entran al partido en algún momento.

Tenderini recibirá un bono al final de la temporada según la cantidad total de goles anotados, consistente en s_1 $[euros/gol]$ si este total queda en el intervalo $[0, G]$ y s_2 $[euros/gol]$ por cada gol adicional a G, menos un porcentaje α del monto gastado en nuevos jugadores, es decir, su bono será:

$$Bono = \begin{cases} s_1 g - \alpha \sum_{i \in M} p_i x_i & si\ g \le G \\ s_1 G + s_2 (g - G) - \alpha \sum_{i \in M} p_i x_i & si\ g > G \end{cases} \qquad \text{con } s_1 > s_2.$$

Suponga que ya se contrató al famosísimo jugador Kakú $\in M$, y que se le prometió que sería titular en al menos el 75% de los partidos. Además, se sabe que si a mitad de temporada, (partido J/2) se han hecho menos de $\bar{G}$ goles, Tenderini será despedido. Por último, cada jugador tiene una resistencia física que le permite jugar a lo más t_i partidos como titular y b_i partidos como suplente.

Plantee un modelo de programación lineal que le permita a Miguel Tenderini maximizar el monto del bono que recibirá al final de la temporada.

Solución problema 11

Variables

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{Si se contrata el jugador i} \\ 0 & \text{Sino} \end{cases}$$

$$Y^K_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si jugador i juega el partido j como k} \\ 0 & \text{Sino} \end{cases}$$

Z = Cantidad de goles totales

Z_1 = Cantidad de goles en [0,G]

Z_2 = Cantidad de goles en (G,+infinito)

Restricciones

1. Naturaleza

$$X_i, Y_{ij}^k \in \{0,1\}$$

$$Z, Z_1, Z_2 \in Z_0^+$$

2. Presupuesto

$$\sum_{i \in M} X_i P_i \leq PPTO$$

3. No juega si no se contrata

$$Y_{ij}^k \leq X_i \qquad \forall i, j, k$$

4. No juega de titular y de suplente al mismo tiempo

$$Y_{ij}^{TTT} + Y_{ij}^{SUP} \leq 1 \qquad \forall i, j$$

5. Cantidad de jugadores titulares y suplentes por partido

$$\sum_i Y_{ij}^{TTT} = T \qquad \forall j$$

$$\sum_i Y_{ij}^{SUP} = B \qquad \forall j$$

6. Definición de z, z1 y z2

$$Z_1 \leq G$$

$$Z \leq Z_1 + Z_2$$

7. Calcular z

$$Z = \sum_{i,j,k} Y_{ij}^k g_{ij}^k$$

8. Kakú 75%

$$\sum_i Y_{KAKU,j}^{TTT} \geq 0.75J$$

9. Kakú contratado

$$X_{kaku} = 1$$

10. No ser despedido

$$\sum_{i,j\le\frac{J}{2},k} Y_{i,j}^{k} g_{ij}^{k} \ge G$$

11. Capacidad Física

$$\sum_{j} Y_{ij}^{TIT} \le t_i \qquad \forall i$$

$$\sum_{j} Y_{ij}^{SUP} \le b_i \qquad \forall i$$

Función Objetivo

$$\max Z_1 S_1 + Z_2 S_2 - \alpha \sum_{i} p_i x_i$$

Problema 12

Una firma de arriendo de automóviles desea planificar su inventario de vehículos para los siguientes T días. La firma posee una flota fija en el horizonte de planificación compuesta de dos tipos de vehículos: económicos (e) y lujosos (l). La firma posee I sucursales y ofrece el servicio "rent-it-here and leave-it-there", lo que permite a sus clientes retirar un vehículo en una sucursal y devolverlo en cualquier otra. Se ha definido que cada arriendo puede durar desde 1 día hasta K días. Por lo tanto, para efectuar un arriendo cada cliente debe especificar: la sucursal de retiro, la sucursal de entrega, el día de comienzo del arriendo, la cantidad de días de arriendo y el tipo de vehículo que desea arrendar. Al inicio del horizonte de planificación hay R_{iht} vehículos tipo $h \in \{e,l\}$ que ya están arrendados y que deben ser devueltos el día $t \in \{1,\ldots,T\}$ (para t > K R_{iht} =0) considere en la sucursal $i \in \{1,\ldots,I\}$. Además, también al inicio del horizonte, la sucursal $i \in \{1,\ldots,I\}$ cuenta con un inventario de W_{ih} vehículos del tipo $h \in \{e,l\}$.

El departamento de estudios de la firma ha determinado que el precio y la demanda por arriendos con retiro en la sucursal $i \in \{1,\ldots,I\}$, entrega en la sucursal $j \in \{1,\ldots,I\}$, a partir del día $t \in \{1,\ldots,T\}$, de un vehículo del tipo $h \in \{e,l\}$ y con una duración de $k \in \{1,\ldots,K\}$ días, es de p_{ijt}^{hk} pesos y μ_{ijt}^{hk} unidades respectivamente. Si no existe disponibilidad de vehículos tipo económico, la firma puede actualizar a los clientes que los demandan entregándoles un vehículo tipo lujoso al precio de uno económico. Un cliente que demanda un vehículo tipo lujoso por ningún motivo aceptará que se le entregue un vehículo tipo económico. El costo de no satisfacer la demanda de un cliente que solicita un arriendo de un vehículo tipo $h \in \{e,l\}$ por $k \in \{1,\ldots,K\}$ días es de CD_{hk}, independiente del periodo y de las sucursales de retiro y devolución.

La firma ha establecido que en cada periodo debe ofrecer un nivel de servicio del 98% a los clientes que demandan vehículos lujosos. Es decir, en cada periodo a lo más un 2% de este tipo de clientes puede quedar con su demanda insatisfecha. Para que esto sea posible, la firma puede aumentar su disponibilidad de vehículos lujosos arrendando vehículos externos o realizar traslados de vehículos entre algunas sucursales para aumentar la capacidad de las sucursales que enfrentan mayor demanda. El costo para la firma de arrendar un vehículo externo para satisfacer la demanda en $t \in \{1,...,T\}$ de un cliente lujoso que retirará el vehículo en la sucursal $i \in \{1,...,I\}$ y que luego de $k \in \{1,...,K\}$ días lo devolverá en la sucursal $j \in \{1,...,I\}$, es de CA_{ijt}^{k}. Suponga para el caso anterior, que el vehículo externo es llevado a la sucursal i en t, inmediatamente es entregado al cliente quien lo devuelve en la sucursal j en $t+k$, e inmediatamente el vehículo es devuelto al proveedor de éste. El parámetro f_{ij} es uno si es factible realizar traslados entre las sucursales $i \in \{1,...,I\}$ y la $j \in \{1,...,I\}$ y cero en caso contrario. El costo de trasladar un vehículo tipo $h \in \{e,l\}$ desde la sucursal $i \in \{1,...,I\}$ a la $j \in \{1,...,I\}$ en el periodo $t \in \{1,...,T\}$ es de CT_{ijt}^{h}. Existe un presupuesto de B destinado para este fin a lo largo del horizonte.

En la sucursal $i \in \{1,...,I\}$ existe una capacidad de almacenar hasta H_i vehículos cada noche. Cada sucursal $i \in \{1,...,I\}$ tiene la posibilidad de aumentar su capacidad de almacenamiento en E_i unidades pagando un costo fijo de CF_{it} en el periodo $t \in \{1,...,T\}$, este aumento de capacidad dura sólo 1 periodo. El costo de almacenar cada noche un vehículo en la sucursal $i \in \{1,...,I\}$ es de CI_i.

Plantee un modelo de programación lineal que permita que la firma planifique de forma centralizada su inventario de vehículos de forma de maximizar sus utilidades.

Comentarios: Suponga que CA_{ijt}^{k} es tal que $CA_{ijt}^{k} > p_{ijt}^{lk} \quad \forall k \in \{1,...,K\}$, $\forall i, j \in \{1,...,I\}$, $\forall t \in \{1,...,T\}$. Es decir, el costo al que puede arrendar la firma un vehículo lujoso externo es superior al beneficio que éste genera al arrendarlo al cliente que lo demanda. Suponga también que en cada $t \in \{1,...,T\}$ puede suceder o no que $CD_{lk} < CA_{ijt}^{k} - p_{ijt}^{lk}$. Por lo tanto, en algunos periodos puede convenir a priori dejar demanda insatisfecha que arrendar un vehículo externo (aunque la firma podría verse obligada a arrendar para cumplir con el nivel de servicio), pero en otros no.

Solución Problema 12

<u>Variables de decisión:</u>

X_{ijt}^{hk} = Autos tipo h destinados para arriendos, de i a j en t, por k días.

Y_{ijt}^{h} = Envíos de autos tipo h, de i a j, en t.

S_{ijt}^{hk} = Demanda insatisfecha por autos tipo h, de i a j en t, por k días.

I_{it}^{h} = Inventario de autos tipo h disponibles en t, en la sucursal i (al final del día).

V_{ijt}^{k} = Autos lujosos destinados a satisfacer demanda económica, de i a j en t, por k días.

A_{ijt}^{k} = Autos lujosos extra, arrendados para satisfacer la demanda de i a j en t, por k días.

$$Z_{it} = \begin{cases} 1 & \text{Si aumenta capacidad de sucursal i en t.} \\ 0 & \text{Sino} \end{cases}$$

Restricciones:

1. Inventario autos económicos:

$$I_{it}^{h} = I_{i,t-1}^{h} + R_{iht} + \sum_{\theta \in I} \sum_{k=1}^{\min\{t-1,K\}} X_{\theta,i,t-k}^{hk} - \sum_{\theta \in I} \sum_{k=1}^{\min\{T-t,K\}} X_{i,\theta,t-k}^{hk} + \sum_{\theta \in I} (Y_{\theta it}^{h} - Y_{i\theta t}^{h})$$

($\forall$ t > 1, h=e)

$$I_{it}^{h} = W_{ih} + R_{iht} - \sum_{\theta \in I} \sum_{k=1}^{\min\{T-t,K\}} X_{i\theta t}^{hk} + \sum_{\theta \in I} (Y_{\theta it}^{h} - Y_{i\theta t}^{h})$$

($\forall$ t=1, h=e)

2. Inventario autos lujosos:

$$I_{it}^{h} = I_{i,t-1}^{h} + R_{iht} + \sum_{\theta \in I} \sum_{k=1}^{t-1} (X_{\theta,i,t-k}^{hk} + V_{\theta i,t-k}^{k}) - \sum_{\theta \in I} \sum_{k=1}^{\min\{T-t,K\}} X_{i,\theta,t-k}^{hk} + V_{\theta it}^{k}) + \sum_{\theta \in I} (Y_{\theta it}^{h} - Y_{i\theta t}^{h})$$

($\forall$ t>1, h=l)

$$I_{it}^{h} = W_{ih} + R_{iht} - \sum_{\theta \in I} \sum_{k=1}^{\min\{T-t,K\}} (X_{i\theta t}^{hk} + V_{i\theta t}^{k}) + \sum_{\theta \in I} (Y_{\theta it}^{h} - Y_{i\theta t}^{h})$$

($\forall$ t=1, h=l)

Nota: También podían definir esta última como $I_{i0}^{h} = W_{ih}$ y dejar la anterior para todo t.

3. Demanda económicos:

$$X_{ijt}^{ek} + V_{ijt}^{k} = \mu_{ijt}^{ek} - S_{ijt}^{ek}$$

$(\forall i, j \in I, k \in \{1,...,K\}, t \in \{1,...,T\})$

4. Demanda lujosos:

$$X_{ijt}^{lk} + A_{ijt}^{k} = \mu_{ijt}^{lk} - S_{ijt}^{lk}$$

$(\forall i, j \in I, k \in \{1,...,K\}, t \in \{1,...,T\})$

5. Nivel de servicio:

$$\sum_{i,j,k} S_{ijt}^{lk} \leq 0{,}02 * \sum_{i,j,k} \mu_{ijt}^{lk}$$

$(\forall t \in \{1,...,T\})$

6. Factibilidad de envíos:

$$Y_{ijt}^{h} \leq M * f_{ij}$$

$$\forall i, j \in I, h \in \{e, l\}, t \in \{1,...,T\}, M >> 0$$

7. Capacidad almacenaje:

$$\sum_{h} I_{it}^{h} \leq H_i + E_i * Z_{it}$$

$$\forall i \in I, t \in \{1,...,T\}$$

8. Presupuesto:

$$\sum_{i,j,t,h} CT_{ijt}^{h} * Y_{ijt}^{h} \leq B$$

<u>Función objetivo</u>:

$$\max\{ \sum_{i,j,k,t} (X_{ijt}^{ek} + V_{ijt}^{k}) p_{ijt}^{ek} + \sum_{i,j,k,t} (X_{ijt}^{lk} + A_{ijt}^{k}) p_{ijt}^{lk} - \sum_{ijkth} S_{ijt}^{hk} CD - \sum_{ijkt} A_{ijt}^{k} CA_{ijt}^{k}$$

$$- \sum_{ijkt} Y_{ijt}^{h} CT_{ijt}^{h} - \sum_{ith} I_{it}^{h} CI_i - \sum_{it} Z_{it} CF_{it} \}$$

Problema 13

1) Consideremos M = {1,...,m}, N = {1,...,n}, y sean $M_j \subseteq M$ para $j \in N$. Decimos que $F \subseteq N$ cubre (covers) M si $M = \bigcup_{i \in F} Mi$. Decimos que $F \subseteq N$ es un empaquetamiento (packing) con respecto a M si $M_i \cap M_j = \emptyset \ \forall i \neq j \in F$. Finalmente, decimos que $F \subseteq N$ es una partición (partition) de M si es un covering y un packing al mismo tiempo. Supongamos que escoger el conjunto M_j tiene un costo/beneficio de c_j.

Formule el problema de obtener un cover, un packing y un partition F de costo/beneficio mínimo como un problema lineal entero, suponiendo:

M = {1,2,3,4,5};	N = {1,2,3,4}
M_1 = {1,2,3}	$c_1 = 1$
M_2 = {3,4}	$c_2 = -6$
M_3 = {3,4,5}	$c_3 = -5$
M_4 = {1,2}	$c_4 = 2$

y encuentre el óptimo en cada caso.

Hint: Para la formulación, arme una matriz A que utilice de manera apropiada en las columnas la composición de los conjuntos M_j y elija el vector b conveniente.

2) Considere P_i:={ $x \in \Re^n_+ : A_i x \leq b_i \, , x \leq d$ } para i=1,...,m. Definimos Y_k:={ $x \in \Re^n$: existen al menos k conjuntos P_i tales que $x \in P_i$}.

Formule el espacio de soluciones factibles de Y_k como un problema entero mixto.

Nota: Para cada P_i existe w_i tal que $\forall\, 0 \leq x \leq d$ se tiene que $A_i x \leq b_i$ +wi.

Hint: Utilice una variable binaria que valga 0 si x no está en P_i.

Solución Problema 13

1) Se deben plantear 3 ppl, uno para set covering, uno para set packing y otro para set partitioning. El planteamiento general de estos problemas es el siguiente:

<u>Set Covering</u>:

<u>Parámetros</u>:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ i \in Mj, \ \forall i = 1,...,m \ ; \ \forall j = 1,...,n \\ 0 & \sim \end{cases}$$

<u>Variable</u>:

$$x_j = \begin{cases} 1 & si\ j \in F, \ \forall j = 1,...,n \\ 0 & \sim \end{cases}$$

<u>Restricciones</u>:

1.- Cada elemento de M debe estar contenido al menos una vez en alguno de los Mj:

$$\sum_j a_{ij} * x_j \geq 1 \qquad \forall i = 1,...,m$$

2.- Naturaleza de las variables:

$$x_j \in \{0,1\}$$

Función objetivo:

$$\min z = \sum_j c_j * x_j$$

(También era valido poner maximización de acuerdo al enunciado)

Set Packing:

Parámetros:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ i \in Mj, \ \ \forall i = 1,...,m \ \ ; \ \ \forall j = 1,...,n \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Variable:

$$x_j = \begin{cases} 1 & si\ \ j \in F, \ \ \forall j = 1,...,n \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Restricciones:

1.- Cada elemento de M puede estar a lo más una vez en alguno de los Mj (no puede estar en 2 Mj diferentes, pues sino la intersección de estos no sería vacía):

$$\sum_j a_{ij} * x_j \leq 1 \qquad \forall i = 1,...,m$$

2.- Naturaleza de las variables:

$$x_j \in \{0,1\}$$

Función objetivo:

$$\min z = \sum_j c_j * x_j$$

(También era valido poner maximización de acuerdo al enunciado)

Set Partitioning:

Parámetros:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ i \in Mj, \ \ \forall i = 1,...,m \ \ ; \ \ \forall j = 1,...,n \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Variable:

$$x_j = \begin{cases} 1 & si\ \ j \in F, \ \ \forall j = 1,...,n \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Restricciones:

1.- Cada elemento de M debe estar en alguno de los Mj, y sólo en uno de ellos (covering + packing):

$$\sum_j a_{ij} * x_j = 1 \qquad \forall i = 1,...,m$$

2.- Naturaleza de las variables:

$$x_j \in \{0,1\}$$

<u>Función objetivo</u>:

$$\min z = \sum_j c_j * x_j$$

Nota de corrección: En el enunciado no se pide escribir el problema general, por lo que es válido si el alumno plantea estos problemas para el caso particular dado. En ese caso, se debe escribir la matriz A del caso particular:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Y el modelo queda igual al anterior, sólo que la restricción 1 queda:

$$A * x = e$$

siendo A la matriz anteriormente definida y "e" un vector de 1s. (ojo que este es el caso para el set partitioning, en el set packing y set covering va con la desigualdad respectiva).

Los óptimos para cada caso son:

Set covering: x1 = x2 = x3 = 1, x4 = 0. Con esto, z = -10

Set packing: x2 = 1, x1 = x3 = x4 = 0. Con esto, z = -6

Set partitioning: x3 = x4 = 1, x1 = x2 = 0. Con esto, z = -3

Criterio de corrección: Encontrar el óptimo para cada caso no debe valer más de 0,1 pto por caso, esto se pide sólo para facilitar la visualización del problema. Lo importante aquí es plantear el modelo, por lo tanto, cada modelo vale 0,9 pts (0,3 por crear la variable correctamente, 0,5 por escribir bien la restricción 1 y 0,1 por la naturaleza de las variables -> Escribir solo la matriz A no da puntaje).

2)

<u>Variables</u>:

X = Puntos en el espacio

$$t_i = \begin{cases} 1 & si \ x \in P^i, \quad \forall i = 1,...,m \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Nota: En estricto rigor, t_i puede valer tanto 1 como 0 cuando x está en Pi (analizar restricción 1 para ver que esto es cierto). El alumno debe señalar esto para tener todo el puntaje de la segunda variable.

<u>Restricciones</u>:

1.- Si x pertenece al poliedro i, debe cumplirse que Aix ≤ bi:

$$A_i * x \leq b_i + wi * (1 - t_i) \qquad \forall i = 1,...,m$$

2.- x debe estar en al menos k poliedros

$$\sum_i t_i \geq k$$

3.- X acotado entre 0 y d

$$0 \leq x \leq d$$

4.- Naturaleza de las variables:

$$t_i \in \{0,1\} \quad ; \quad x \in \Re^n$$

Nota: Este problema no tiene función objetivo.

Criterio de corrección: 0,4 cada variable. 0,7 restricción 1. 0,6 restricciones 2 y 3. 0,3 naturaleza de las variables.