INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

1. Introducción

IN5303

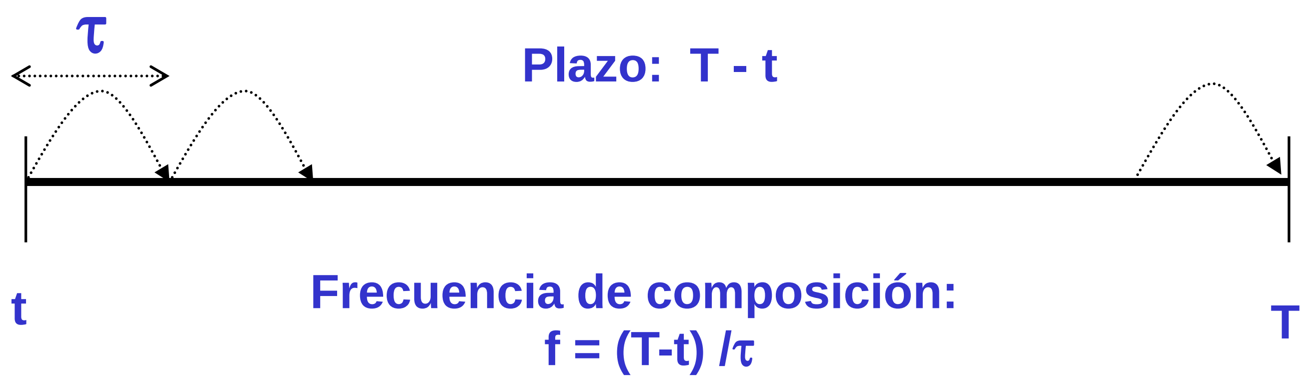
Finanzas II

Agenda

- Repaso de las matemáticas financieras asociadas a los instrumentos de renta fija.
- Entender principios, estructuración y valorización de Bonos, Swaps, FRAs y Forwards.
- Estudiar y aplicar modelos de estructura de tasas de interés.

Tasa de Interés

Una tasa de interés se aplica a un intervalo de tiempo con una composición dada



Si r es la tasa anual para ese plazo y frecuencia, W es lo que se obtiene al invertir $1 al plazo T-t (años) y composición de frecuencia f

$$W = \left(1 + \frac{r(t,T;f)}{f}\right)^{(T-t)\cdot f}$$

Casos particulares y medición de plazos

- **Composición lineal**
- **Composición continua**
- **Convenciones de plazos**
  - ACT/360
  - ACT/ACT
  - 30/360
  - Etc.

Valorización sin riesgo de incumplimiento

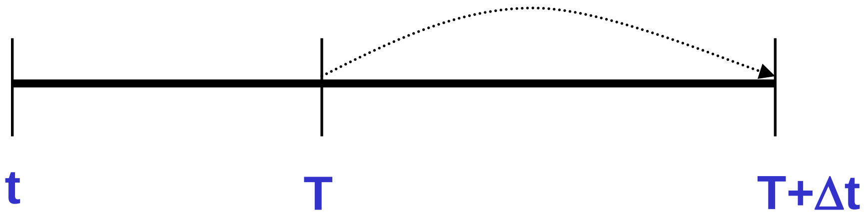
- **Existencia de tasas de interés para diferentes plazos**
- **Condición de no arbitraje**
- **P(t,T) precio en t de flujo de caja que paga \$1 en $T \geq t$: Bono cero cupón**
- **Bonos: Instrumentos pagan flujos de caja N_i en fechas t_i.**
- **Se pueden valorizar con $P(t,t_i)$.→ Conocer P(t,T)**

Tasas y factores de descuento

- **Si Rc(t,T) tasa de interés spot compuesta continuamente,**

$$P(t,T) = e^{-R_c(t,T)\cdot(T-t)} \qquad R_c(t,T) = -\frac{\ln P(t,T)}{(T-t)}$$

- **Tasa forward (continua) en t entre T y T+Δt, f(t,T, T+Δt)**



$$\frac{P(t,T+\Delta t)}{P(t,T)} = e^{-f(t,T,T+\Delta t)\cdot\Delta t}$$

Casos límites

- **Cuando T→t, Rc(T,t)→ r(t) Tasa "corta"**

- **Cuando Δt→0 f(t,T,T+Δt)→ f(t,T) forward instantánea**
  - Notar que:

$$f(t,T) = -\frac{\partial \ln(P(t,T))}{\partial T} \quad \textbf{(*)}$$

  - Y que, por lo tanto

$$f(t,T) = R_C(t,T) + \frac{\partial R_c(t,T)}{\partial T} \cdot (T-t)$$

  - Además r(t)=f(t,t)

Factores de descuento y tasa forward

- **Integrando la ecuación (*) para un t fijo:**

$$-f(t,s)ds = dLn(P(t,s))$$

- **Luego**

$$\int_t^T dLn(P(t,s)) = -\int_t^T f(t,s)ds$$

- **Como P(t,t)=1**

$$Ln(P(t,T)) = -\int_t^T f(t,s)ds$$

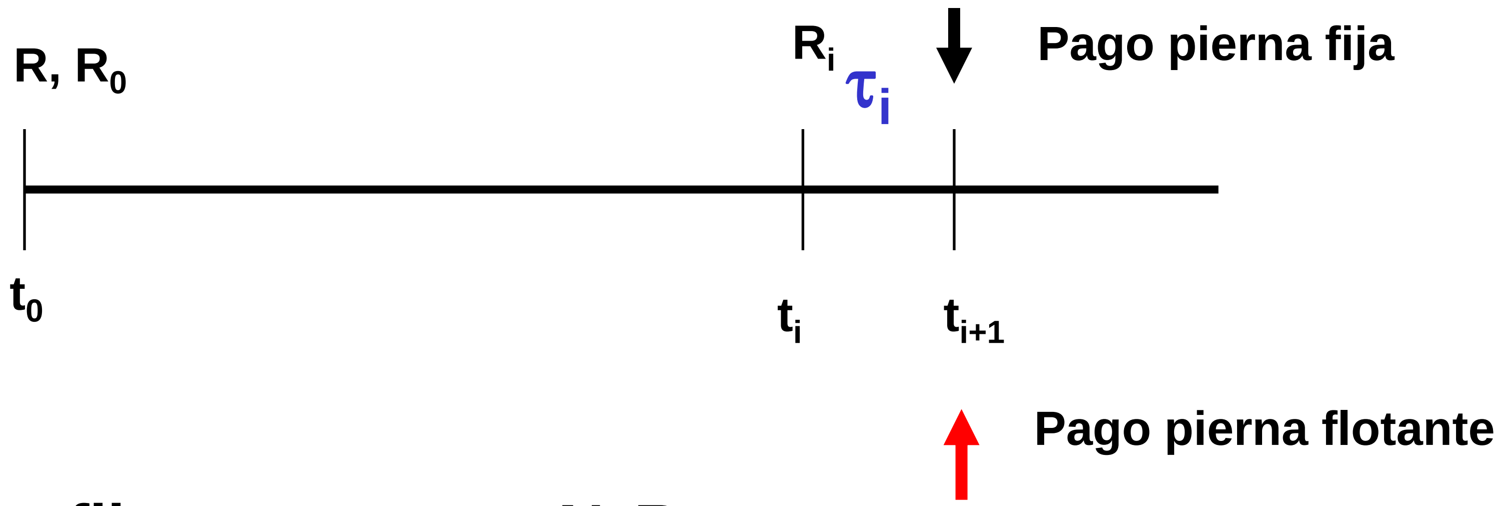
- **Es decir:**

$$P(t,T) = e^{-\int_t^T f(t,s)ds}$$

Instrumentos Contingentes

- Fras
- Swaps
- Opciones

Flujos de caja de un swap



- **Pierna fija: en t_{i+1} paga $N_i \cdot R \cdot \tau_i$.**
- **Pierna flotante en t_{i+1} paga $N_i \cdot R_i \cdot \tau_i$., lo que en t_i vale:**

$$VFl(t_i) = N_i \frac{R_i \cdot \tau_i}{(1 + R_i \cdot \tau_i)}$$

Valorización de instrumentos tasa flotante

- **Hoy t=0 compramos bono cero cupón vencimiento t_i $P(0,t_i)$ y vendemos bono cero cupón vencimiento t_{i+1}, $P(0,t_{i+1})$.**
- **En t_i la cartera valdrá $V(t_i)$:**

$$V(t_i) = 1 - P(t_i, t_{i+1}) =$$

$$1 - \frac{1}{1 + R_i \cdot \tau_i} = \frac{R_i \cdot \tau_i}{1 + R_i \cdot \tau_i}$$

- **Suponiendo R_i tasa de composición simple vigente en t_i para el plazo τ_i.**

Por condición de no arbitraje

- **Valor de la estrategia de bonos cero cupón debe ser igual al valor de la pierna flotante**
- **Es decir (para N_i=1)**

$$V(t_i) = VFl(t_i)$$

- **Y como los flujos de caja son iguales en t_{i+1}, ambos instrumentos deben valor lo mismo en 0, por lo que,**

$$P(0,t_i) - P(0,t_{i+1}) = R_i \cdot \tau_i \cdot P(0,t_{i+1})$$

- **Es decir**

$$R_i = \frac{P(0,t_i)/P(0,t_{i+1}) - 1}{\tau_i}$$

¿Cómo determinar la tasa R en 0?

- **Tiene que darse que el valor de la pierna fija sea igual al valor de la pierna flotante…. ¿Por qué?**
- **Es decir,**

$$\sum N_i \cdot R \cdot \tau_i \cdot P(0,t_{i+1}) = \sum N_i \cdot F_i \cdot \tau_i \cdot P(0,t_{i+1})$$

- **Por lo que**

$$R = \frac{\sum N_i \cdot F_i \cdot \tau_i \cdot P(0,t_{i+1})}{\sum N_i \cdot \tau_i \cdot P(0,t_{i+1})}$$

Forward Rate Agreemtents

Definición:

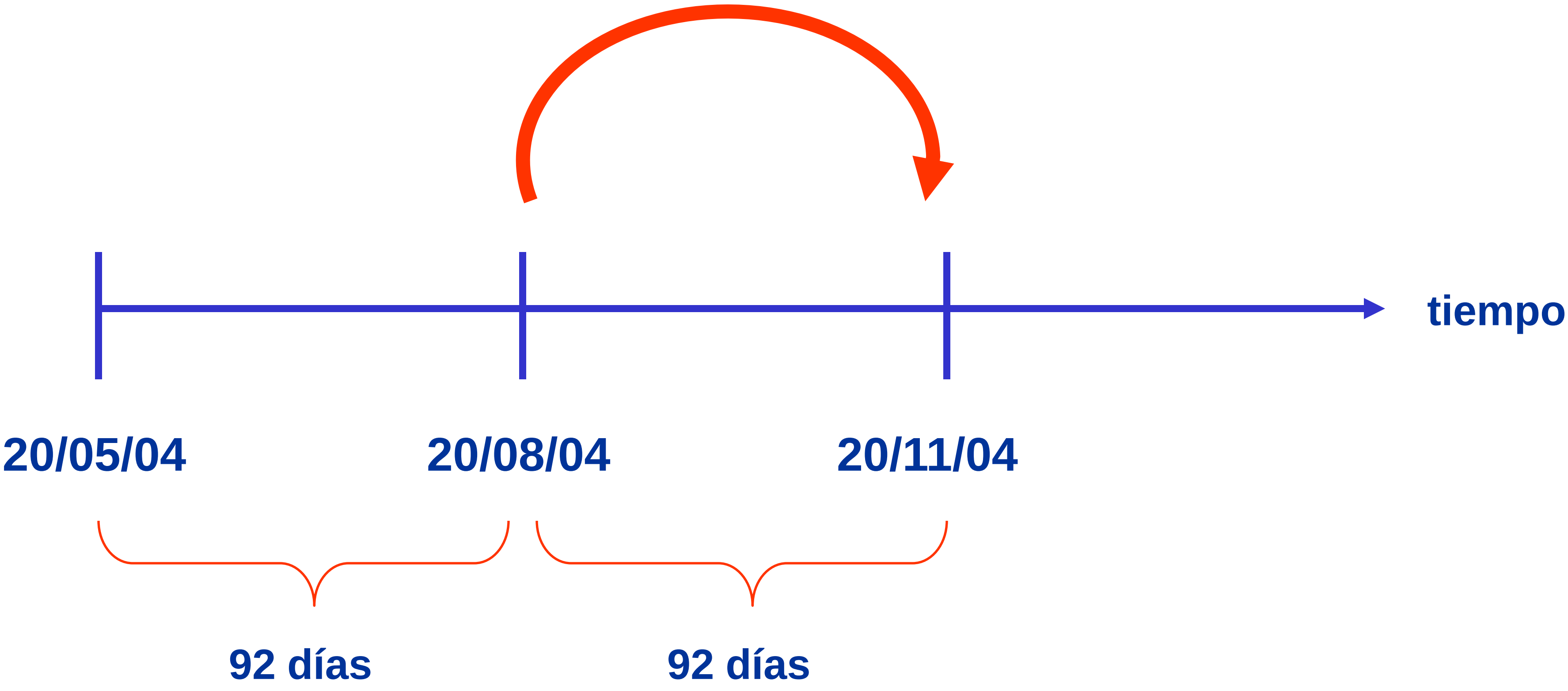
- Es un contrato donde dos instituciones (contrapartes) acuerdan hoy que una cierta tasa se aplicará a un cierto monto nocional, por un cierto período de tiempo, y a partir de una fecha específica.

Ejemplo: FRA 3x6

- Hoy 20/05/04 acordamos que recibo tasa UF + 2,5% sobre un nocional de 100,000 UF entre el 20/8/04 y el 20/11/04. En el fondo fijo hoy la tasa de un depósito a plazo de 90 días, que comienza en 90 días más.

Mecánica de un FRA

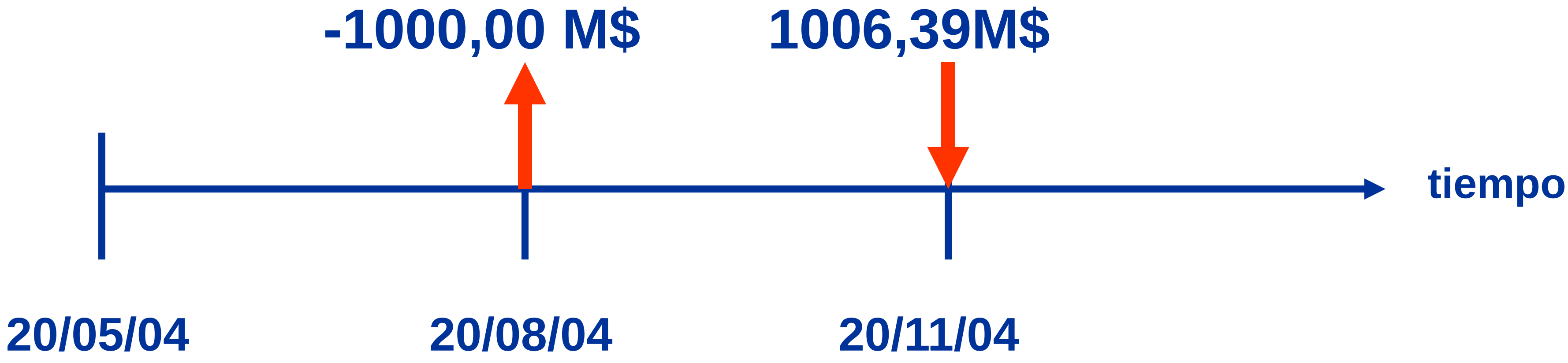
El contrato de seguro de tasas puede representarse con el siguiente gráfico



Flujos de caja de un FRA

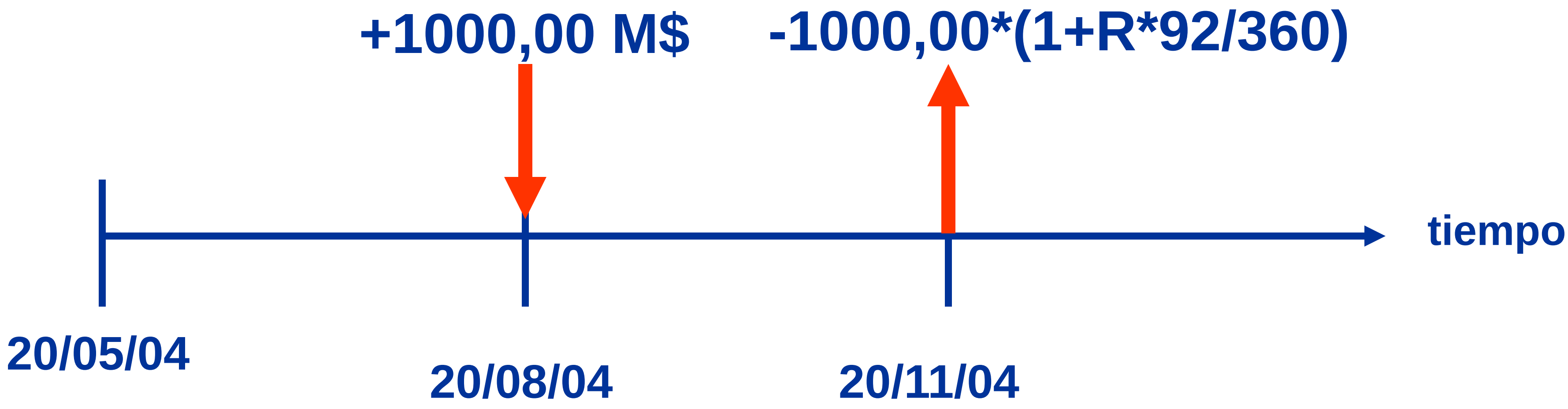
De acuerdo al ejemplo, entregamos a la contraparte 1.000M$ el 20/08/04 y cobraríamos el 20/11/04 el monto final del depósito

$$1000{,}00 \cdot \left(1 + \frac{2{,}5}{100} \cdot \frac{92}{360}\right) = 1006{,}39$$



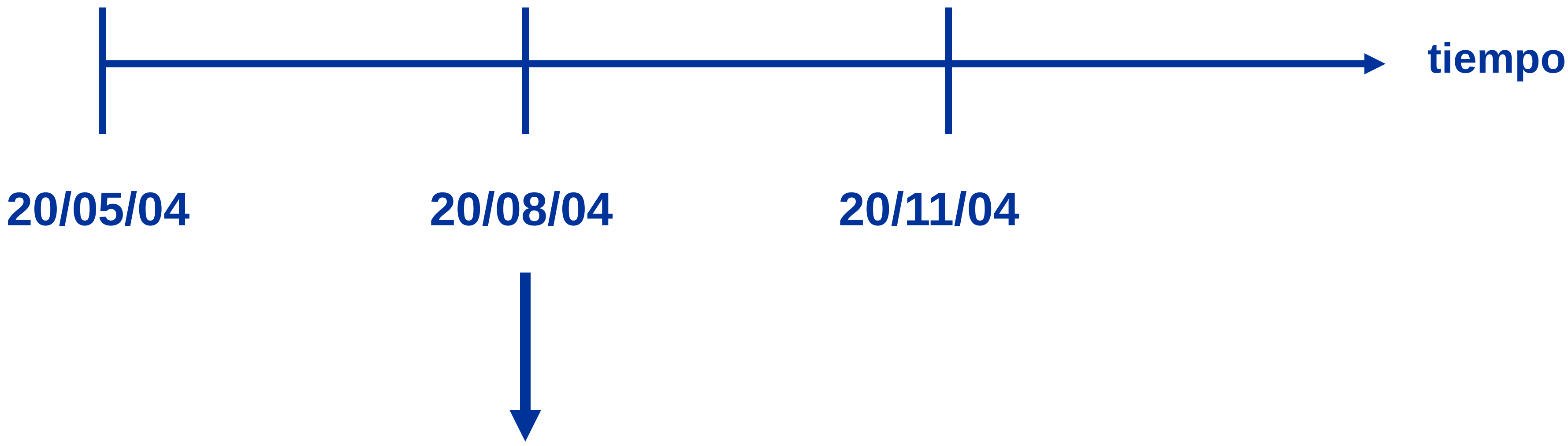
Flujos de caja de un FRA

Por otro lado, la contraparte tomará el principal y lo depositará a la tasa a 90 días vigente en el mercado el 20/08/04 (R). Los flujos de la contraparte serán entonces



Compensando el FRA

El día 20/08/04 se conocerá la tasa R, y en vez de esperar 3 meses el FRA típicamente se cancelará por compensación esa fecha:



$$C = -1000{,}00 + \frac{1006{,}389}{\left(1 + R \cdot \frac{92}{360}\right)}$$

Cómo se fija la tasa del FRA?

- Cómo sabemos si 2,5% es un precio justo?
- Supongamos que observo la siguiente estructura de tasas cero cupón:

Plazo (días)	30	60	90	180	360
Tasa	2.15%	2.20%	2.42%	2.47%	2.53%

- Podríamos realizar entonces las siguientes operaciones (miles de $):

	20-May-04	20-Ago-04	20-Nov-04
Crédito a 3 meses	993,842	-1,000,000	0
Depósito a 6 meses	-993,842	0	1,006,389
Neto	0.0	-1,000,000	1,006,389

Oportunidades de arbitrar al mercado

- **¿Qué ocurre si la tasa del FRA es superior a 2,5% por ejemplo 3,5%...**

	20-May-04	20-Ago-04	20-Nov-04
Crédito a 6 meses	993,842		-1,006,389
Depósito a 3 meses	-993,842	1,000,000	0
Tomo Seguro Tasa (3,5%)		-1,000,000	1,008,945
Neto	0	0	2,556

- **Conviene crédito a 3 meses, depósito a 6 meses y vender el FRA si la tasa ofrecida es inferior a 2,5%**

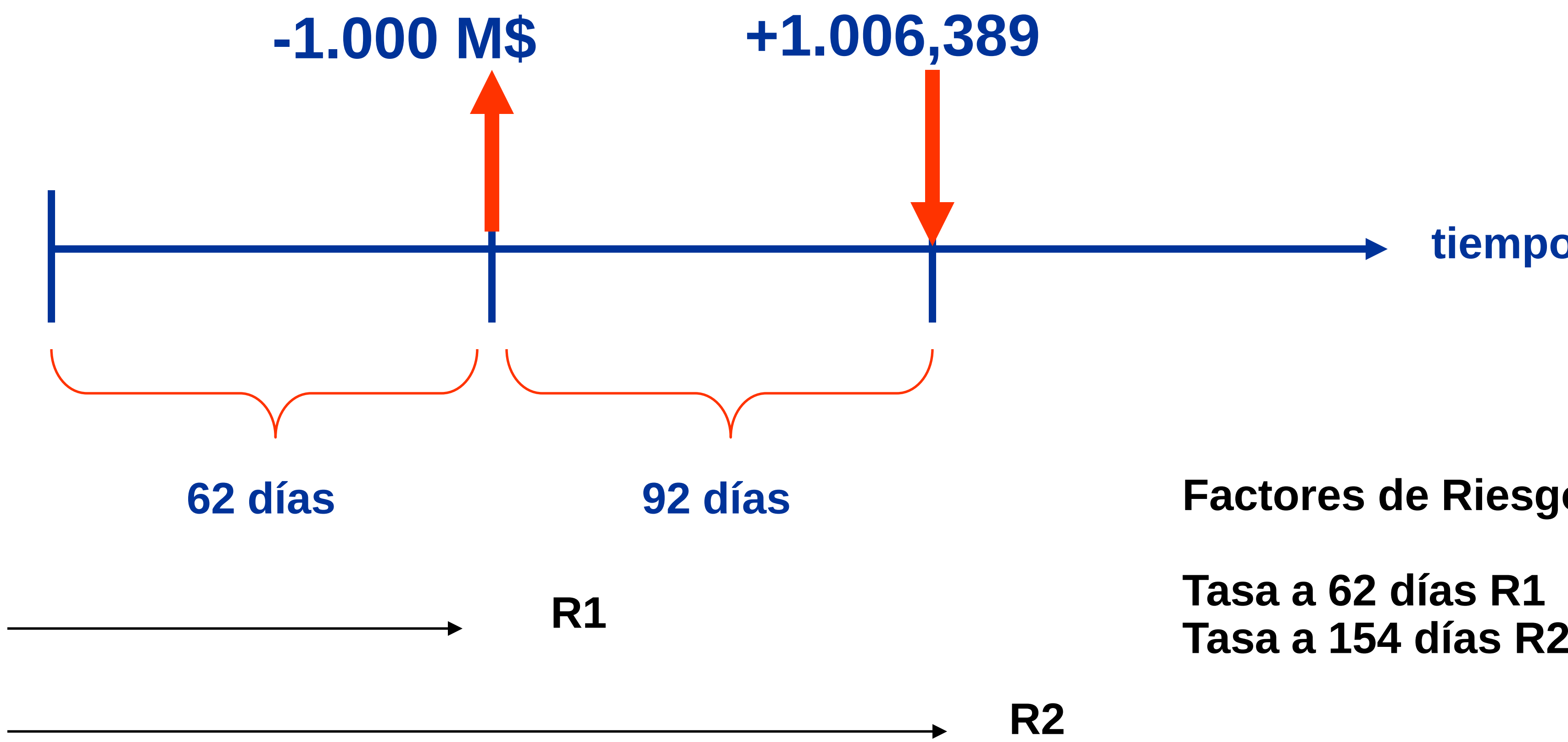
Cómo valorizar el FRA

- **Supongamos que han pasado 30 días desde que aseguramos la tasa de 90 días en 2,5%.**
- **Cuánto vale nuestro contrato hoy?**
- **Supongamos que la nueva estructura de tasas es la siguiente:**

Plazo (días)	30	60	90	180	360
Tasa	2.80%	2.90%	3.10%	3.25%	3.50%

Valorizando un FRA

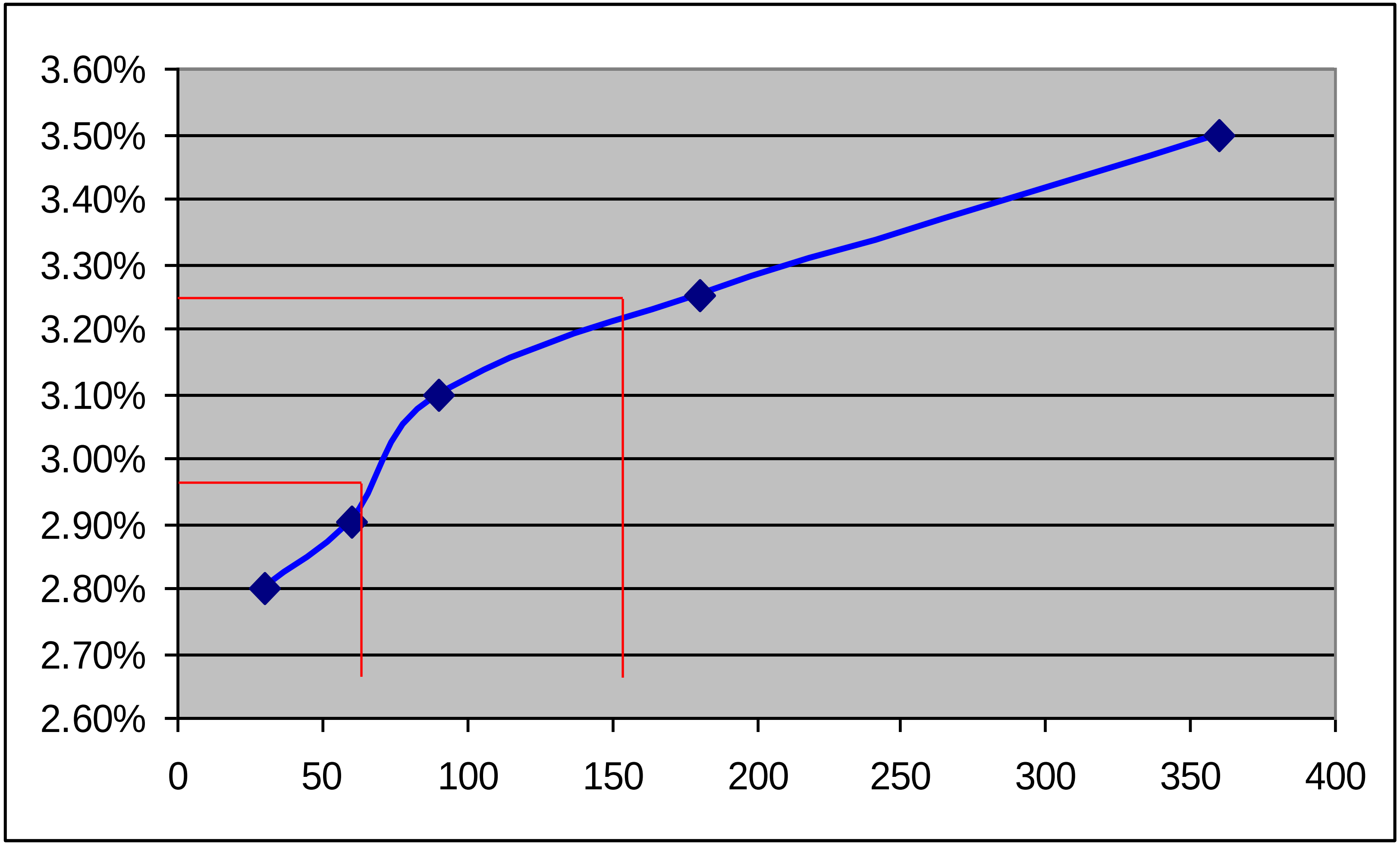
FRA tiene la siguiente estructura equivalente de flujos:



Factores de Riesgo

Tasa a 62 días R1
Tasa a 154 días R2

La curva cero es fundamental



Ejemplo: Valor del FRA

- **Tasa R1=2,92%**
- **Tasa R2=3,22%**

$$V = \frac{-1000}{\left(1+2{,}92\% \cdot \frac{62}{360}\right)} + \frac{1006{,}389}{\left(1+3{,}22\% \cdot \frac{154}{360}\right)}$$

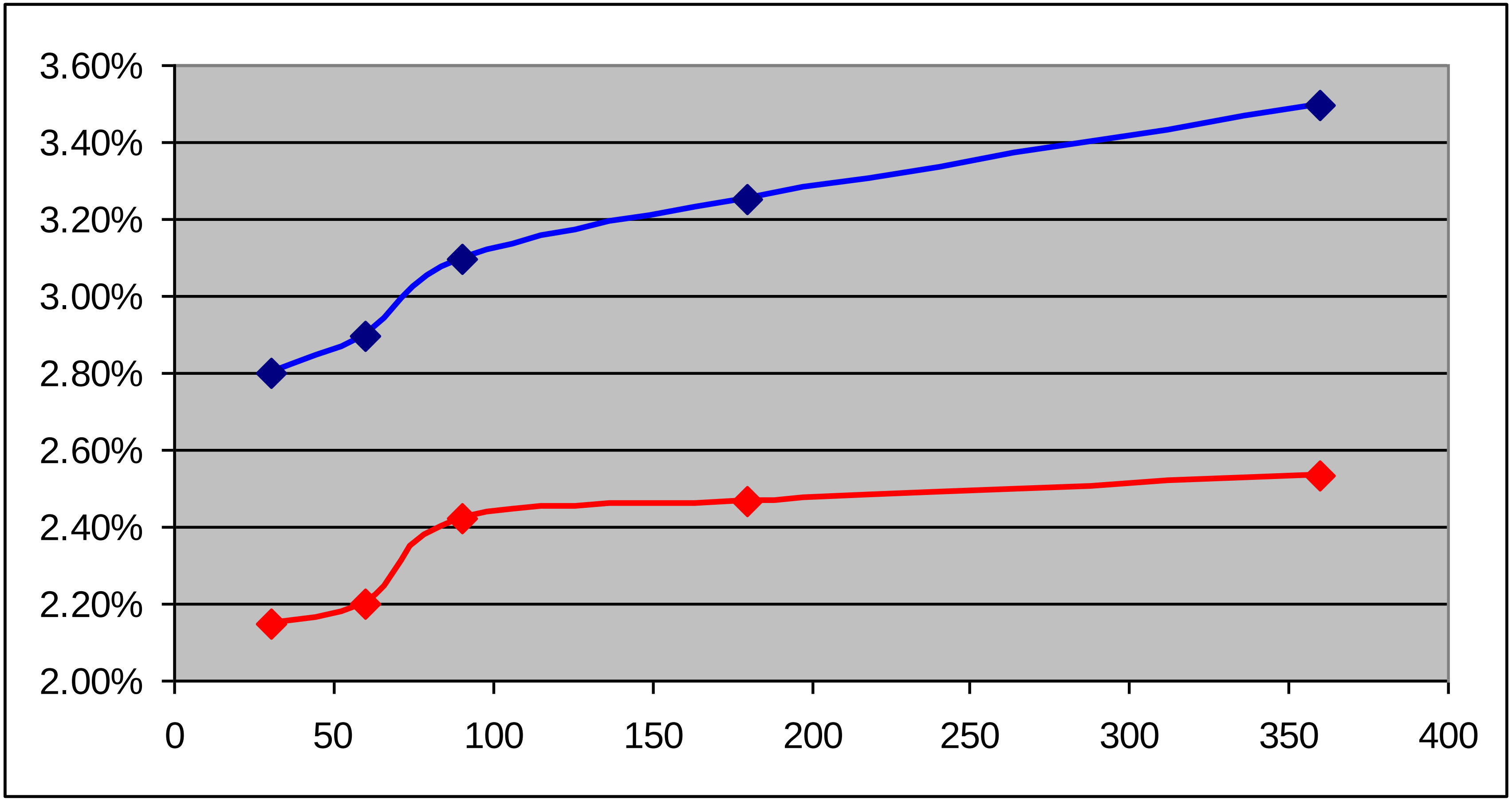
$$V = -2{,}282$$

Cómo se explica este menor valor?

- **Podemos descomponer esta pérdida por diversos efectos:**
  - Efecto paso del tiempo (devengo)
  - Efecto precio (cambio de tasas)

Descomposición del P&L FRA	
Efecto Devengo (tiempo)	
Pago 2,42%	-2,020.6
Recibo 2,47%	2,045.7
Efecto Neto	25.1
Variación de Tasas y Duración	
Nueva Tasa Pasivo	2.92%
Duración Pasivo	62
Efecto VP	843.5
Nueva Tasa Activo	3.22%
Duración Activo	154
Efecto VP	-3,145.3
Eefcto Precio Neto	-2,301.7
Eefecto TOTAL	-2,276.7

Movimiento de la estructura de tasas explica mayor parte del cambio



También podemos explicarlo por el cambio en las tasa forward

- **El Valor del FRA,**

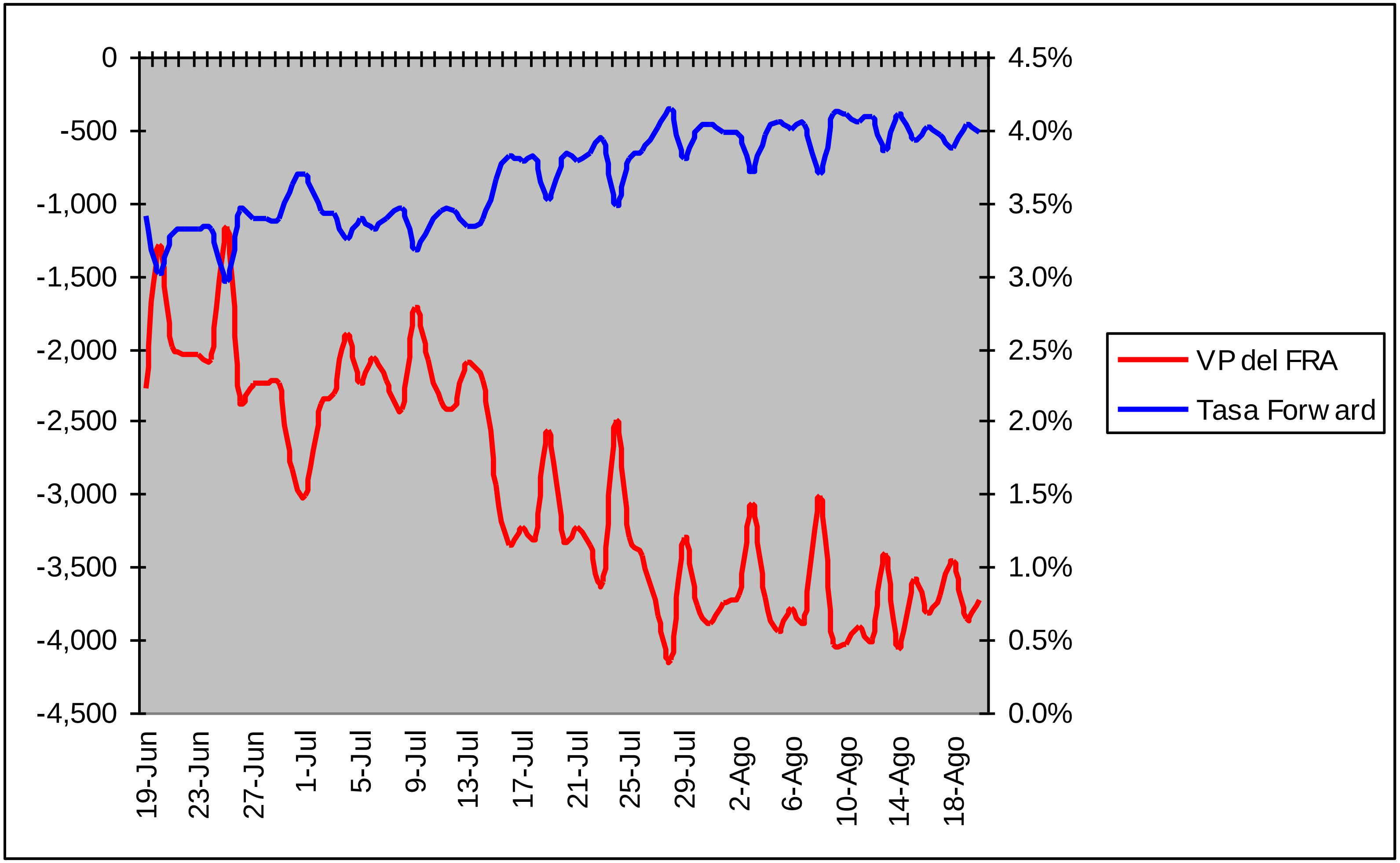
$$V = \frac{-1000}{\left(1 + R1 \cdot \frac{d1}{360}\right)} + \frac{1006{,}389}{\left(1 + R2 \cdot \frac{d2}{360}\right)}$$

- **Se puede escribir como**

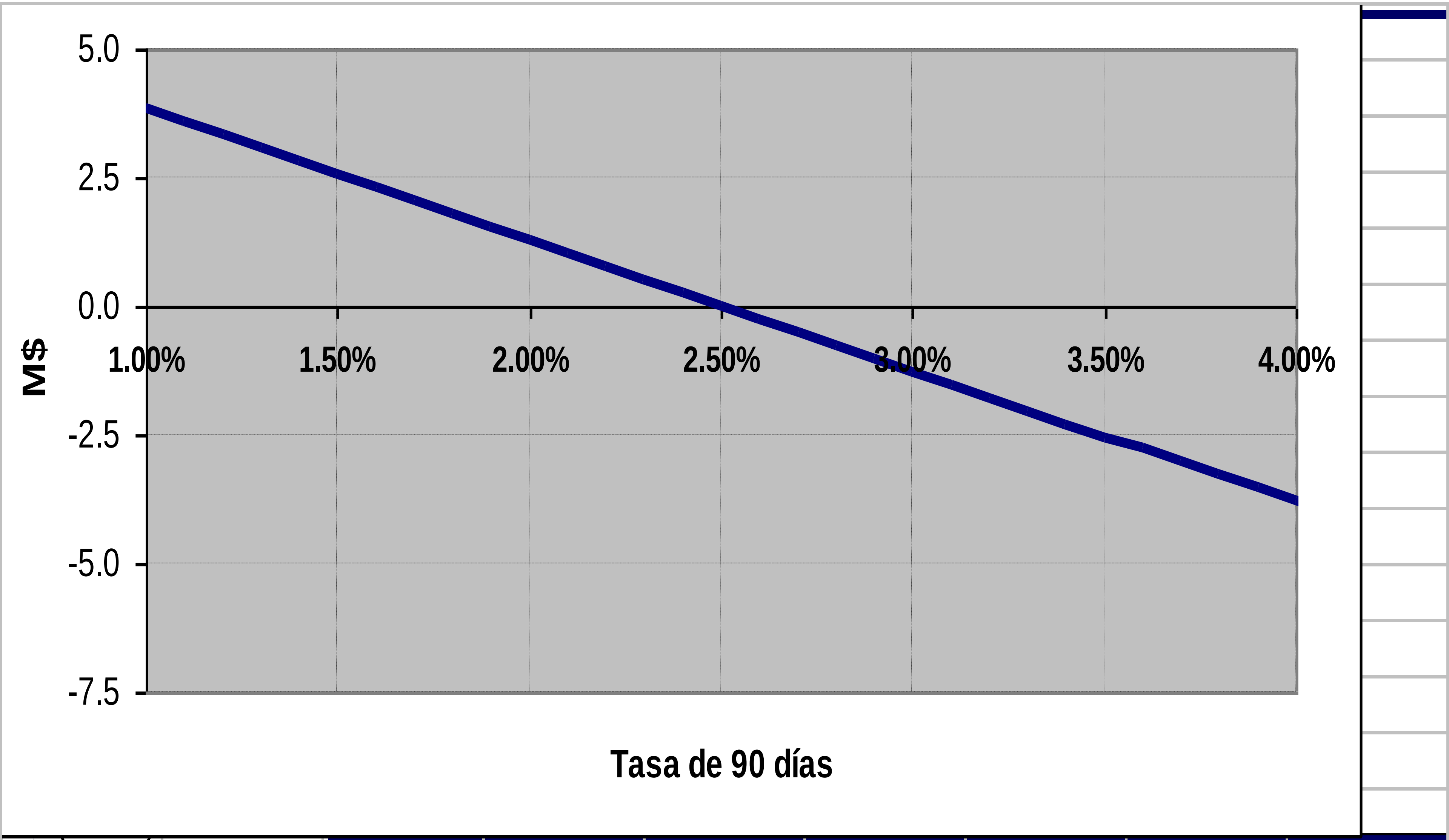
$$V = \frac{1000}{\left(1 + R2 \cdot \frac{d2}{360}\right)} (2{,}5\% - F) \cdot \left(\frac{d2 - d1}{360}\right)$$

- **Por lo que si calculamos la tasa forward F =3,41%, la compensación estimada a pagar será de 1000*(3,41%-2,5%)*92/360 = 2.312,9 (miles de $). Al traer este valor a valor presente llegamos al MTM original del FRA de -2.282.**

Ejercicio de simulación de tasas y MTM del FRA

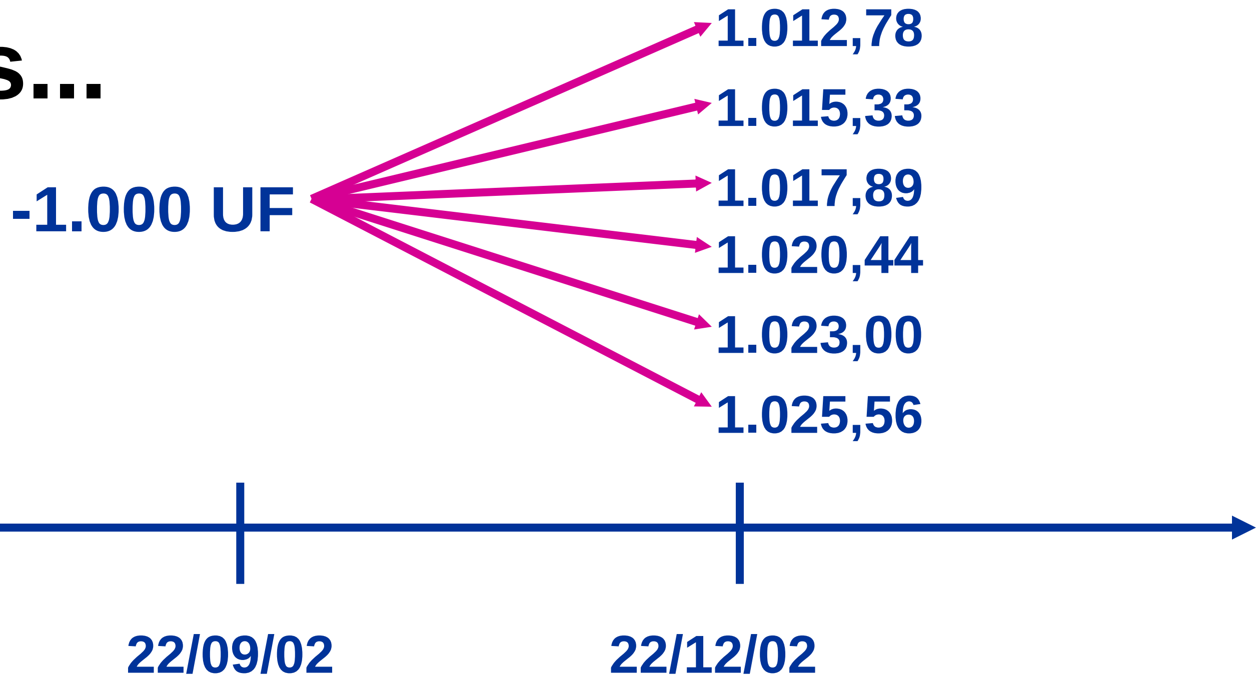


P&L (ex-post) del FRA



Sin embargo ex-ante...

Cambiamos...



Por...

-1.000 UF → 1.018,75

¿Cuándo se demanda un FRA?

- **Eliminar riesgo tasa de repricing**
  - Asegurar hoy tasas para pasivos frente a una potencial alza de tasas
  - Asegurar hoy tasas para inversiones futuras frente a una potencial caída de tasas
- **Cubrir riesgos de swaps**
- **Alterar duración de la cartera sin cambiar el balance:**
  - Equivalente a incorporar un pasivo y un activo a un plazo mayor
- **Tomar posición frente a una visión de mercado**

FRA y los swaps de tasas

La compensación que se paga al comienzo del período puede escribirse como

$$C = -1000 \cdot \frac{\left(1 + R \cdot \frac{91}{360}\right)}{\left(1 + R \cdot \frac{91}{360}\right)} + 1000 \cdot \frac{\left(1 + 7{,}5\% \cdot \frac{91}{360}\right)}{\left(1 + R \cdot \frac{91}{360}\right)}$$

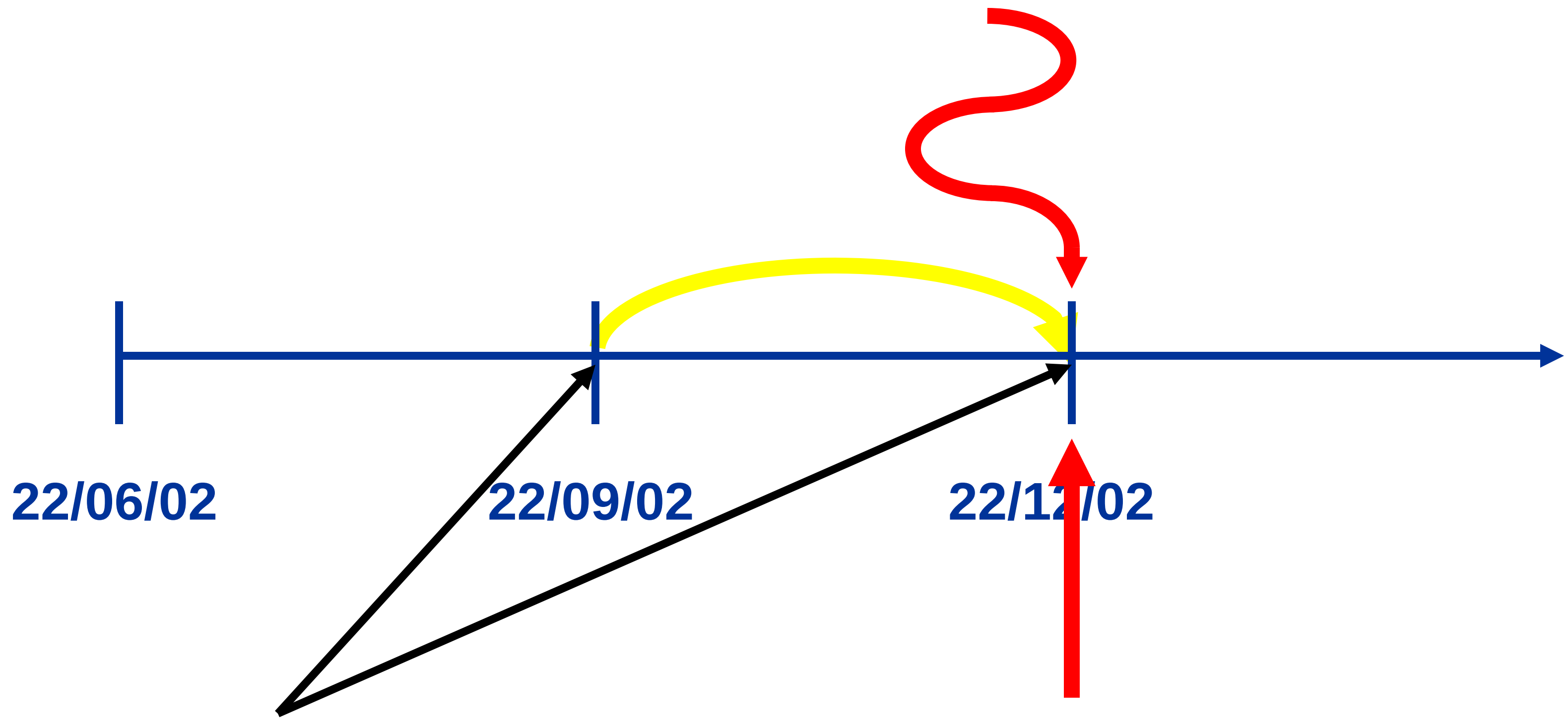
Lo que equivale decir que:

$$C = \frac{1000}{\left(1 + R \cdot \frac{91}{360}\right)} \cdot \left(7{,}5\% - R\right) \cdot \frac{91}{360}$$

Es decir en este ejemplo estamos intercambiando tasa fija por tasa flotante y compensando al comienzo del período

Equivalencia entre FRAs y Swaps

FRAs son entonces equivalentes a un swap de tasas de un solo periodo



Pagos pueden ocurrir en cualquiera de estas dos fechas. Lo estándar es que ocurran al comienzo del período.

Swaps de Tasas de Interés

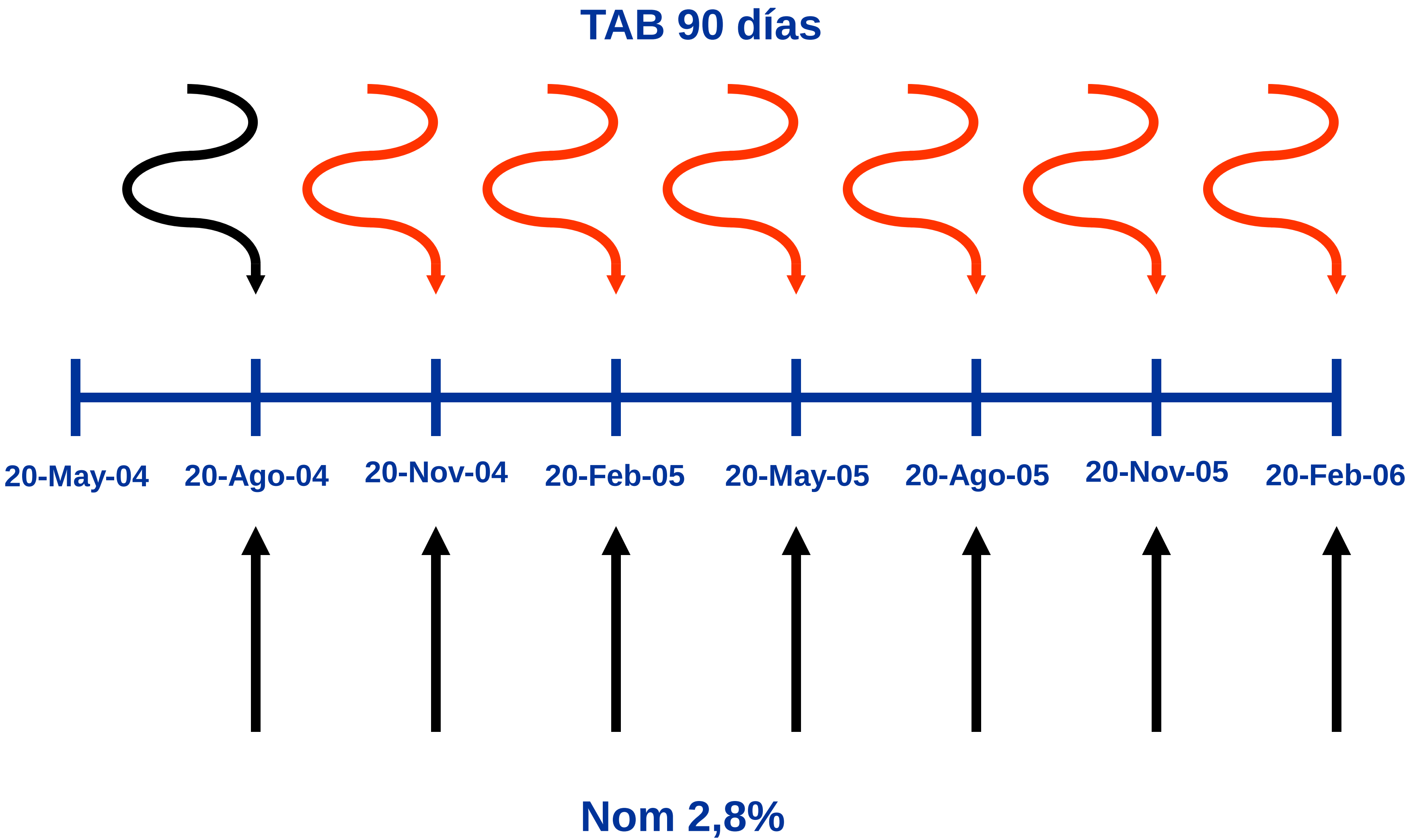
Definición: Es un acuerdo entre dos contrapartes para intercambiar flujos de cajas en el futuro de acuerdo a una fórmula predeterminada.

Swaps de tasas tipo "Plain Vanilla" es el más común. Institución B se compromete a pagar a A interés sobre un nocional por un determinado número de períodos, y por su parte A se compromete a pagar a B en las mismas fechas un tasa flotante que se irá fijando en el futuro de acuerdo a un estándar acordado.

Ejemplo:

Un swap a dos años entre A y B, en el que se intercambia TAB nominal 90 días por una tasa nominal fija de 2,8%, sobre un nocional de 2.000 millones de $, a contar del 20 de mayo de 2004, con pagos trimestrales.

Mecánica del swap de tasas



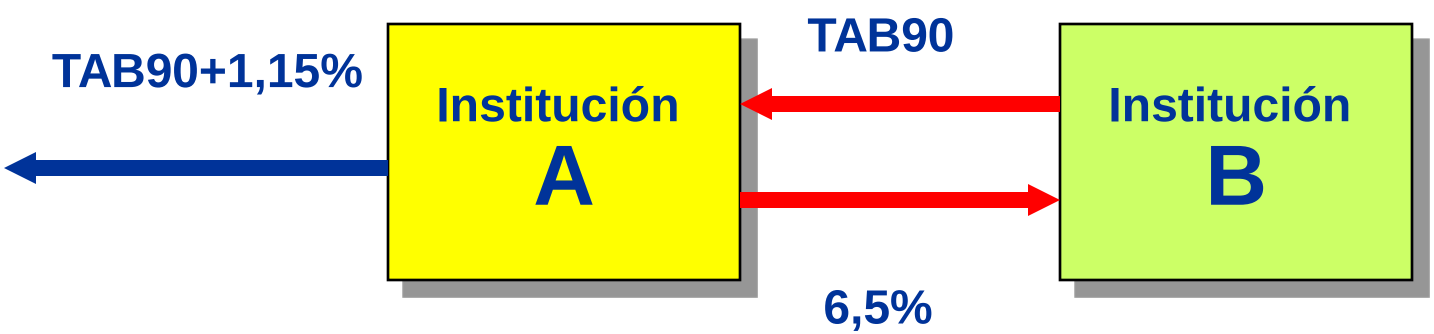
Flujos del swap (Nocional de 2.000 Millones)

	Días		Tasa	Flujo (M$)	Flujo (M$)	Flujo (M$)
Fecha	Intervalo	Tasa Fija	TAB 90	Pierna Fina	Pierna Flotante	Fijo-Flotante
20-May-04		2.80%	2.16%			
20-Ago-04	92	2.80%	**2.20%**	1,431.11	1,104.00	327.11
20-Nov-04	92	2.80%	**2.30%**	1,431.11	1,124.44	306.67
20-Feb-05	92	2.80%	**2.70%**	1,431.11	1,175.56	255.56
20-May-05	89	2.80%	**2.80%**	1,384.44	1,335.00	49.44
20-Ago-05	92	2.80%	**2.90%**	1,431.11	1,431.11	-
20-Nov-05	92	2.80%	**3.10%**	1,431.11	1,482.22	(51.11)
20-Feb-06	92	2.80%	**3.30%**	1,431.11	1,584.44	(153.33)
20-May-06	89	2.80%	**3.50%**	1,384.44	1,631.67	(247.22)

Suponiendo una realización determinada de las Tasas TAB90 hasta Mayo 2006

Swap de tasas: transformando un pasivo

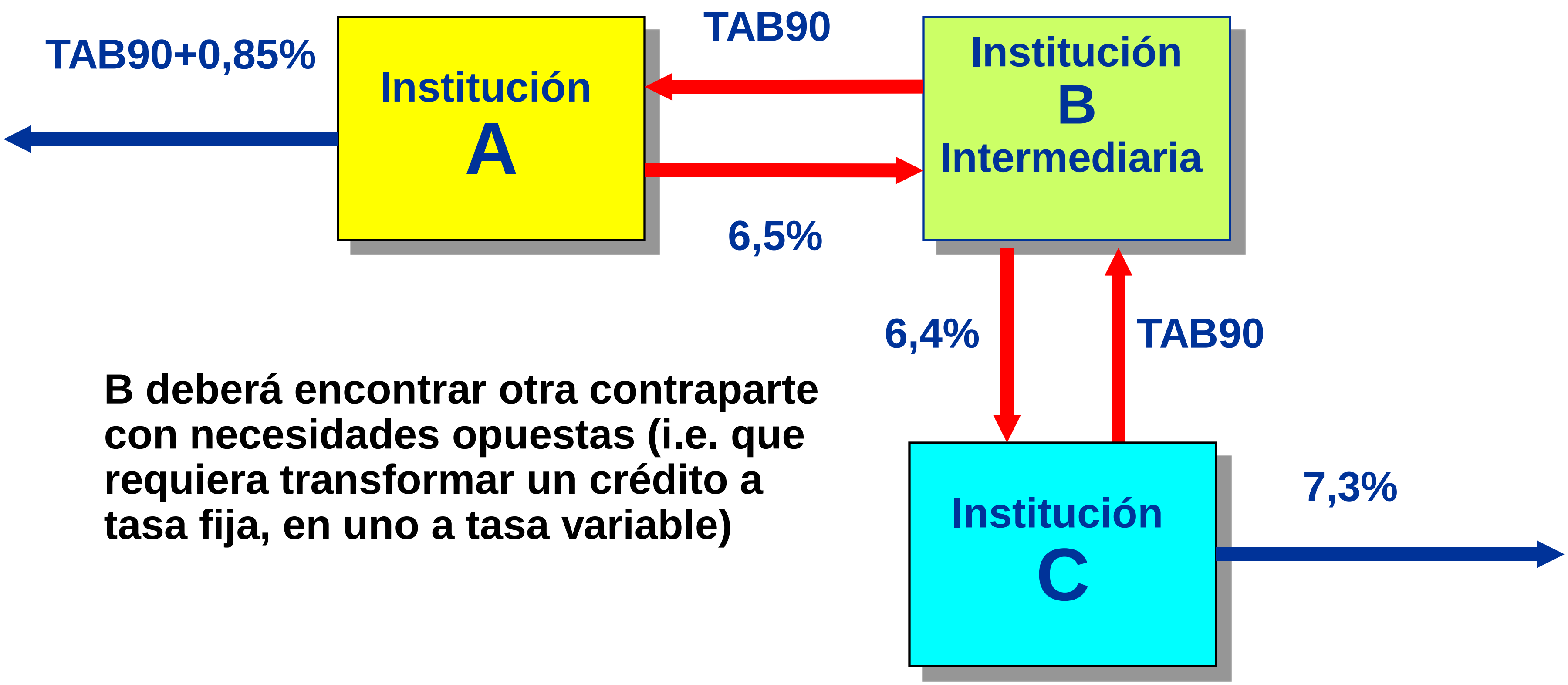
- **Suponga que la institución A en el ejemplo anterior tiene un crédito a 2 años a TAB 90 días + 1,15%, y quisiera cambiar a un crédito a tasa fija.**
- **La institución B ofrece pagarle TAB 90 días vs. una tasa de 6,5% en un swap a dos años:**



El efecto neto para A es pagar una tasa fija. ¿De cuánto?

Intermediarios de swaps

- Suponga que la institución B es un intermediario



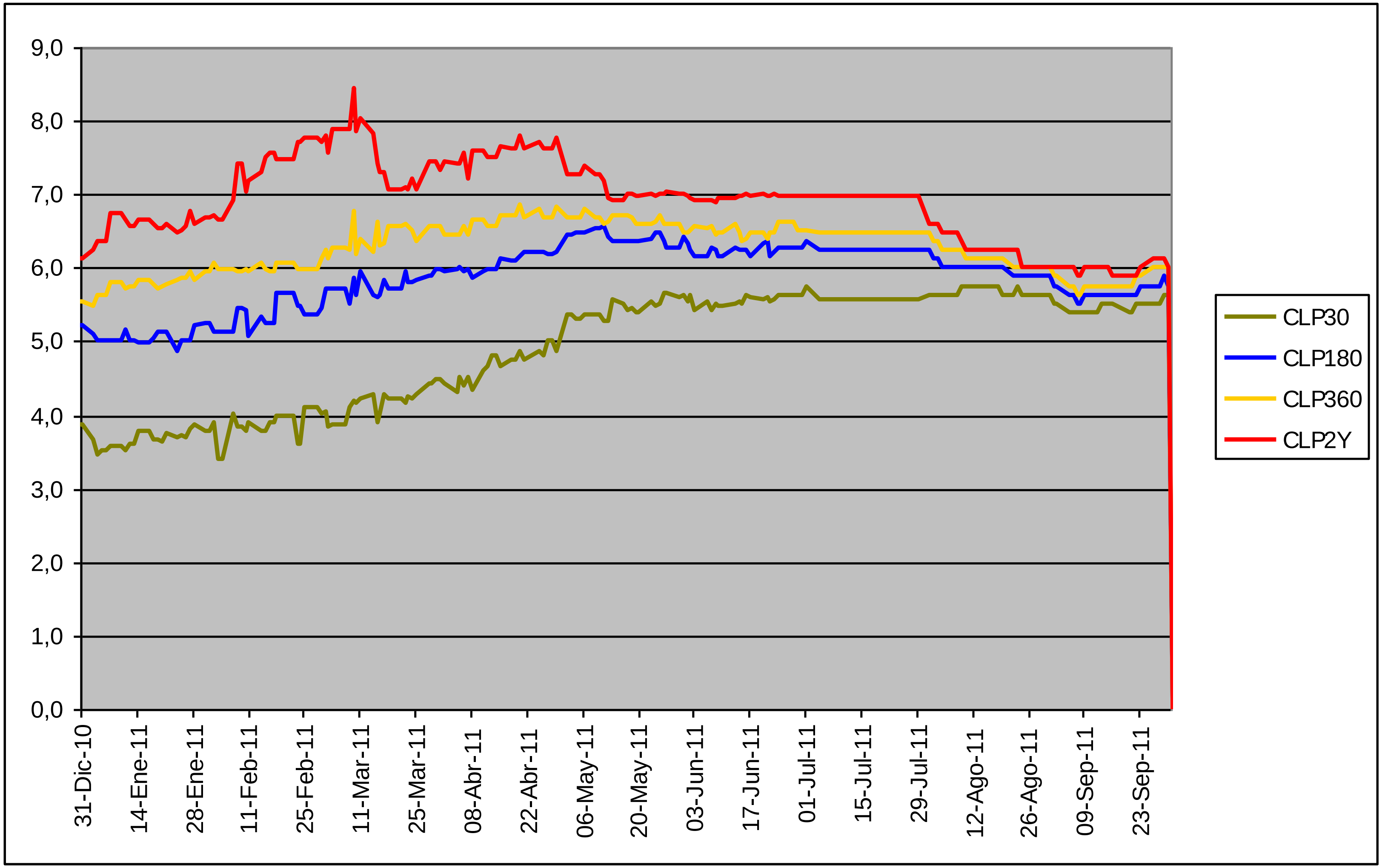
B deberá encontrar otra contraparte con necesidades opuestas (i.e. que requiera transformar un crédito a tasa fija, en uno a tasa variable)

Estructura de tasas

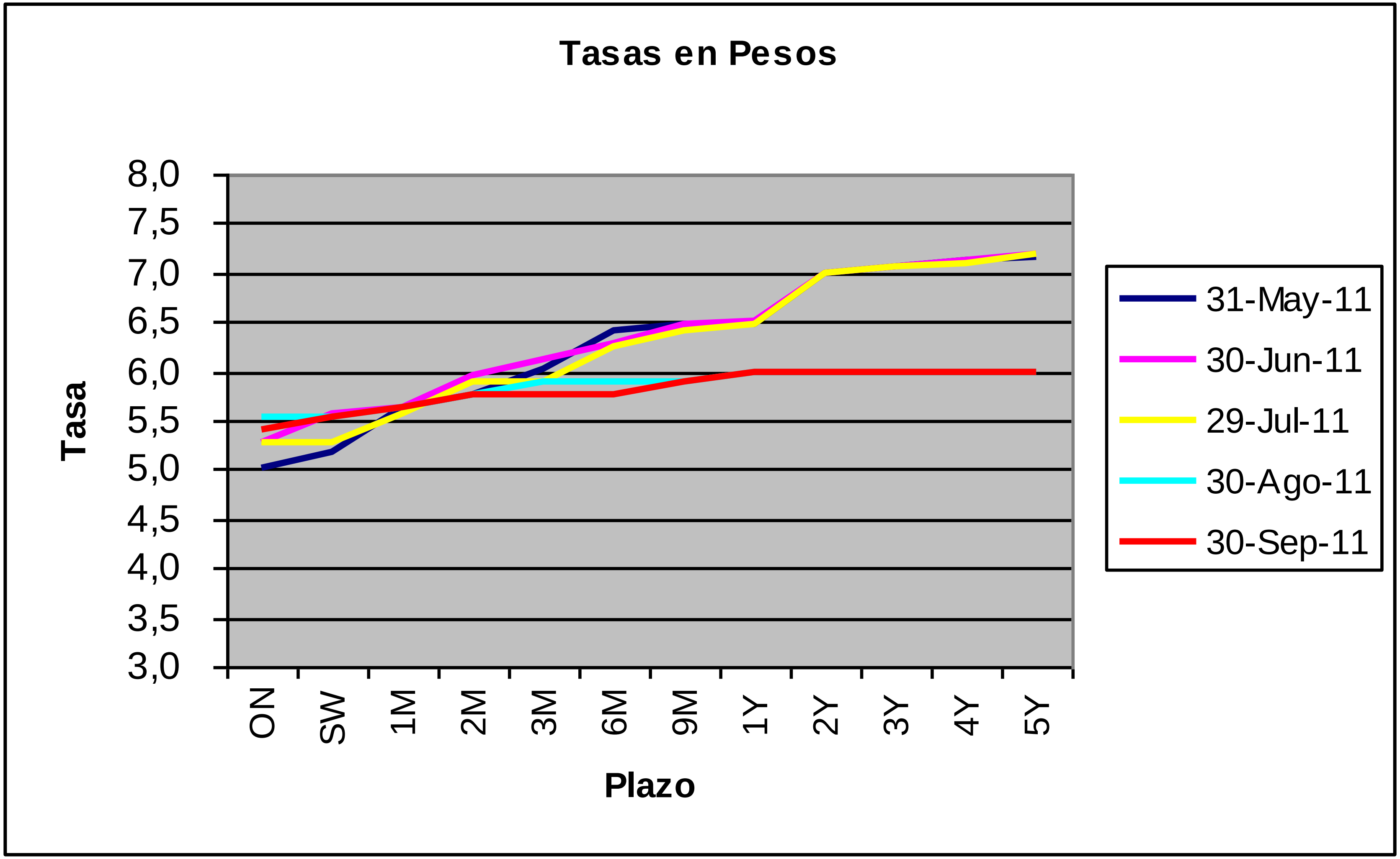
- **Tasas de interés cambian de acuerdo a los plazos. La estructura de tasas refleja, para un momento determinado del tiempo, el costo de oportunidad del inversionista, a diferentes plazos.**
- **La estructura de tasas es la herramienta fundamental del pricing.**
- **Se puede representar como:**
  - Curva Cupón Cero
  - Curva de Rendimientos (Yield Curve)
  - Curva de Factores de Descuento

- **Además, combinaciones de curvas de interés pueden generar curvas de monedas, curvas de tasas forwards, etc.**
- **R(t,T)**

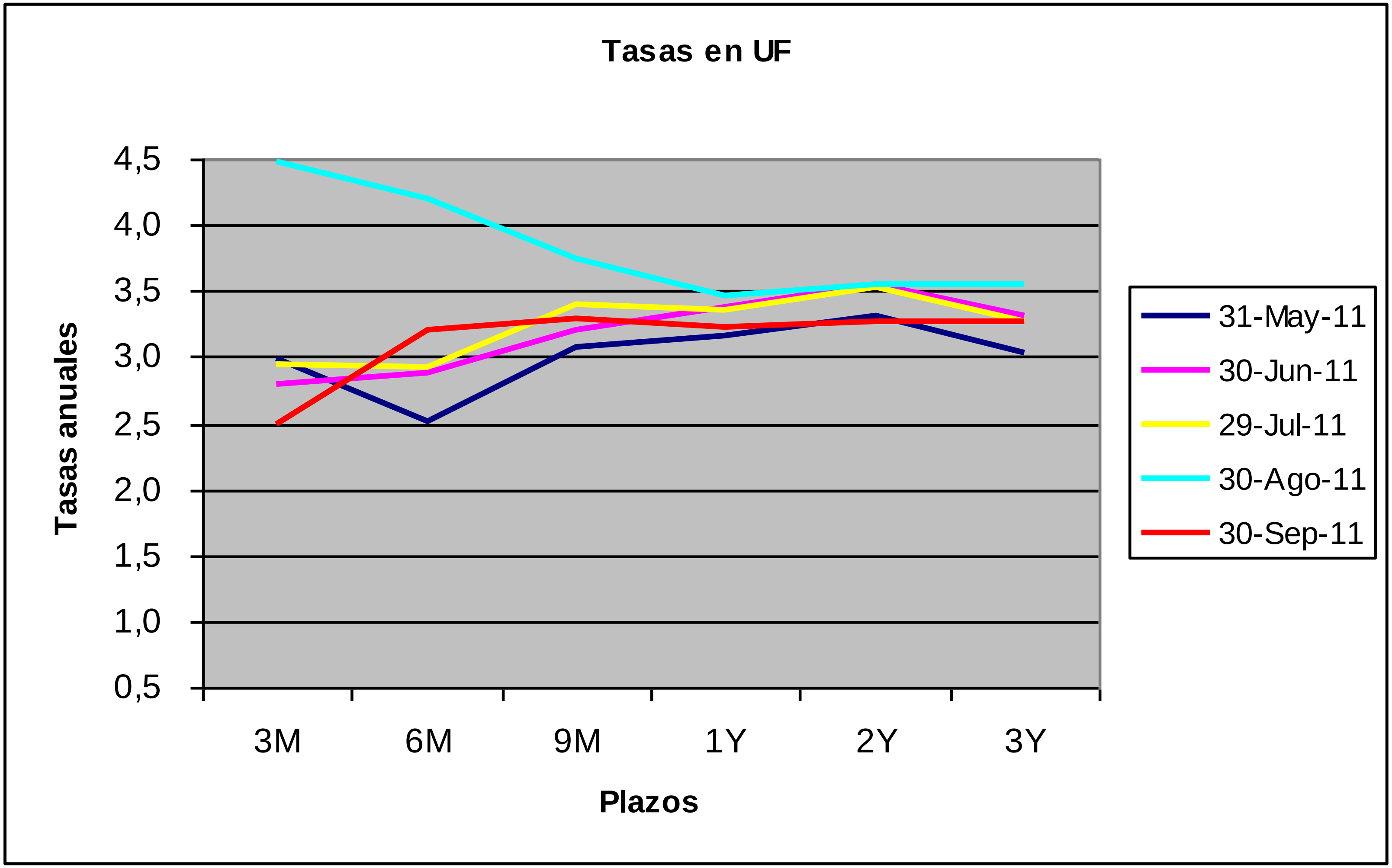
Evolución reciente tasas en pesos



Estructura de tasas en pesos reciente



Estructura de tasas en UF



Aproximaciones de curvas

- **Bootstrapping**
- **Polinomios: oscilan**
- **Curvas Paramétricas: derivadas de una estructura de tasas**
  - Lineales: Estructura de Tasas Afin acorde a un conjunto de funciones que forma una base
  - No Lineales
- **Curvas No paramétricas: se ajustan los datos (Lineal Splines, No Lineal Nelson-Siegel)**

Nelson y Siegel

- **Nelson- Siegel (1985)**
- **Svensson (1994)**
- **Wiseman (1994)**
- **Bjork y Christensen (1997)**
- **Familia de curvas**
  - Pocos parámetros a estimar,
  - flexibilidad limitada, no funcionan para “cucharas”,
  - no son suficientemente precisas para modelar situaciones de no arbitraje
  - fáciles de calcular
  - Funcionan un 90% de la veces

Curvas Nelson-Siegel

- **Si la tasa forward se escribe,**

$$f(\tau) = \beta_0 + \left(\beta_1 + \beta_2 \cdot \tau\right) \cdot e^{-k \cdot \tau}$$

- **Entonces la tasa spot es,**

$$r(\tau) = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} f(s) ds$$

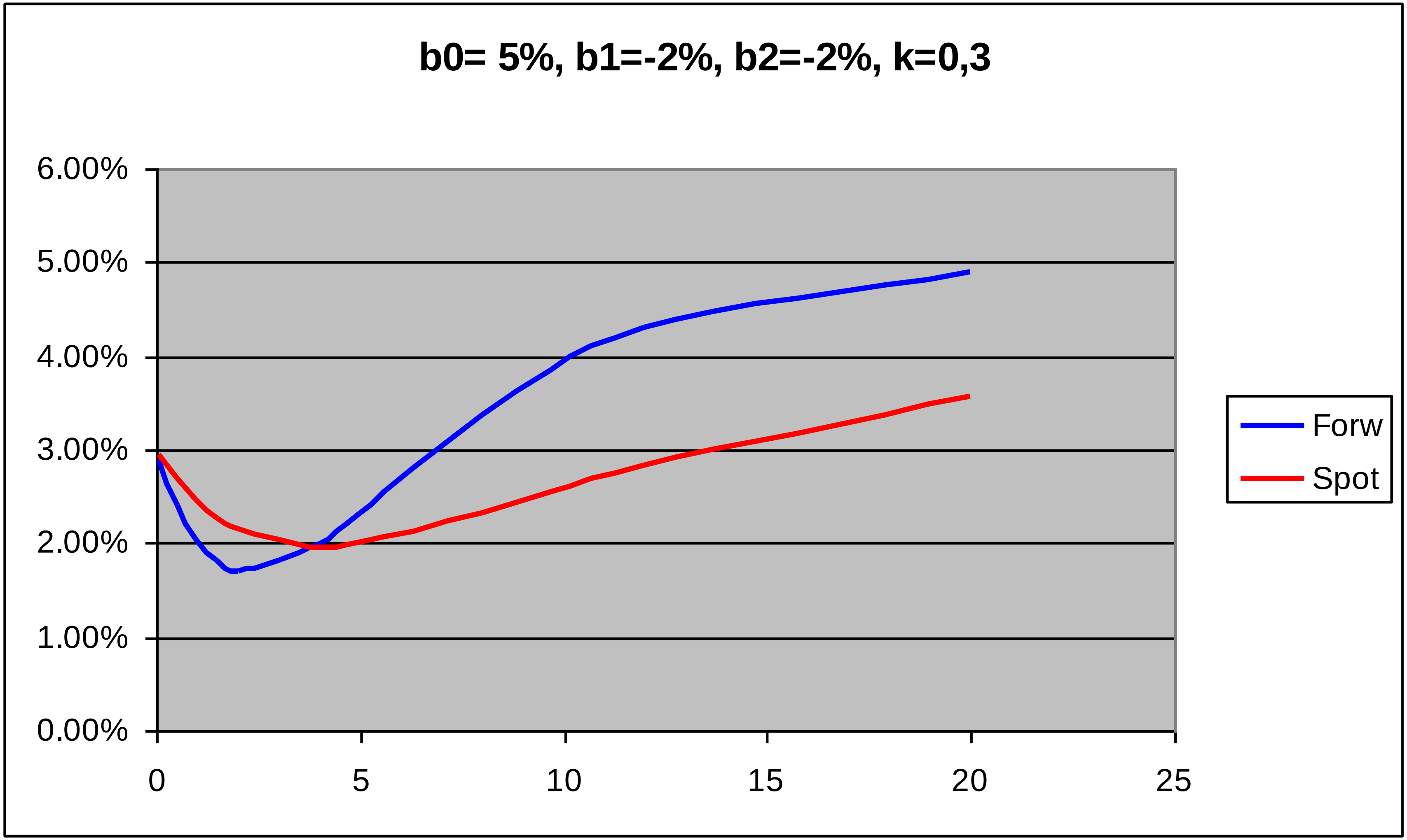
- **Es decir,**

$$r(\tau) = \beta_0 + \left(\beta_1 + \frac{\beta_2}{k} \right) \cdot \frac{1 - e^{-k \cdot \tau}}{k\tau} - \frac{\beta_2}{k} e^{-k \cdot \tau}$$

Interpretando parámetros

- **La tasa corta $r(0)=\beta_0+\beta_1$**
- **La tasa de largo plazo $r=\beta_0$**
- **K controla la ubicación de la curva**
- **β_2 controla la curvatura**

Ejemplo de Nelson-Siegel



Ejemplos

- **Bootstrapping**
  - Curva Libor
  - Curva Intermediación Bancaria
- **Nelson Siegel**