

Problema 1**Parte a)**

Para una cartera con 2 activos $((\sigma_{1,2}, \sigma_1, \sigma_2, r_1, r_2))$, tenemos que la varianza es:

$$\sigma^2_{cartera} = \sigma_1^2 w^2 + \sigma_2^2 (1 - w)^2 + 2\sigma_{1,2} w(1 - w)$$

Minimizando $\sigma^2_{cartera}$ con respecto a w e igualando a 0 obtienen que

$$w = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_{1,2}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{1,2}}$$

Parte b) y c)

Partiremos por resolver el problema general (parte c) y luego veremos el caso particular de b) particulares.

El problema a resolver es:

$$\text{Min } \frac{1}{2} w^T \Sigma w$$

$$\text{s. a. } w^T \vec{1} = 1 \iff \sum w_i = 1$$

Lagrangiano:

$$L: \frac{1}{2} w^T \Sigma w - \lambda (w^T \vec{1} - 1)$$

C.P.O.:

$$\Sigma w = \lambda \vec{1} \quad (1)$$

$$\vec{1}^T w = 1 \quad (2)$$

Despejando w de (1):

$$w = \Sigma^{-1} \lambda \vec{1}$$

Reemplazando w en (2), y despejando λ de esta se obtiene:

$$\vec{1}^T \Sigma^{-1} \lambda \vec{1} = 1$$

$$\lambda = \frac{1}{\vec{1}^T \Sigma^{-1} \vec{1}}$$

Utilizando esta expresión de λ en (1) se puede obtener la solución general del problema que es:

$$w = \frac{\Sigma^{-1} \vec{1}}{\vec{1}^T \Sigma^{-1} \vec{1}}$$

Luego, para la **parte b)**, al no haber correlaciones, la matriz de covarianzas solo contiene los términos de la diagonal (varianzas)

$$\Sigma^{-1} = \sum \frac{1}{\sigma_i^2}$$

Por lo tanto λ :

$$\lambda = \frac{1}{\sum \frac{1}{\sigma_i^2}}$$

Reemplazando en la solución general para el término w_i :

$$w_i = \frac{\frac{1}{\sigma_i^2}}{\sum \frac{1}{\sigma_i^2}}$$

Pregunta 2 (Excel)

Pregunta 3

P3) Si se busca minimizar el riesgo y se tiene como opciones invertir todo en un solo activo (x_1 o x_2), se elegirá el activo que tenga la menor varianza.

Supongamos que x_1 es el activo con menor varianza. Para que exista y se puedan aprovechar los beneficios de la diversificación, el portafolio dado por w_1, w_2 que se

invierten en x_1 y x_2 respectivamente debe tener menor varianza que si se invirtiese todo en el activo x_1 . Para imponer esto se encontrará una condición sobre la correlación:

Se invierte en x_1 y x_2 si:

$$\sigma_1^2 w_1^2 + \sigma_2^2 w_2^2 + 2\rho\sigma_1^1 w_1^1 \sigma_2^1 w_2^1 \leq \sigma_1^2$$

$$\rho \leq \frac{\sigma_1^2 - \sigma_1^2 w_1^2 - \sigma_2^2 w_2^2}{2\sigma_1^1 w_1^1 \sigma_2^1 w_2^1}$$

Cualquier correlación menor al termino expresado hará preferir al portafolio por sobre la opción de no diversificar.